

3 ТУР ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДЫ СУНЦ МГУ. 9 КЛАСС

1. Виктория Владимировна нарисовала на доске два прямоугольных треугольника. Вася заметил: если перемножить длины двух меньших катетов, перемножить длины двух больших катетов и перемножить длины их гипотенуз, то из отрезков получившихся длин можно опять сложить прямоугольный треугольник. Не ошибся ли он?
2. Последовательность a_n задана правилом: $a_{n+1} = \frac{1}{2+a_n}$. Пусть мы выбрали такое a_0 , что для всех n $a_{n+4} = a_n$. Докажите, что $a_{n+2} = a_n$.
3. Из бумаги вырезали правильный восьмиугольник со стороной 2021. Маргарита и Рома играют в игру: по очереди вырезают либо треугольник, либо четырёхугольник с целой площадью. Игрок проигрывает, если он не может сделать ход. Рома ходит первым. Кто из них гарантированно может выиграть, как бы ни играл соперник, и почему?
4. На продолжении высоты BH тупоугольного ($\angle B > \frac{\pi}{2}$) треугольника ABC отметили точку K такую, что $\angle BKA = \angle BCA$. Пусть высота KF треугольника BKA пересекает прямую CA в точке R . Докажите, что треугольники KHA и BHR подобны.
5. В стране N все города соединены дорогами с соблюдением следующих правил:
 - (a) По каждой дороге можно проехать только в одну сторону;
 - (b) Выехав из города по дороге, невозможно вернуться обратно по дорогам.

Министр транспорта решил провести дорожную реформу. Он по очереди летает по городам и раздает указы: если в какой-то город дороги только входят и ни одна не выходит, он указывает развернуть направление движения по каждой из них; если есть хоть одна выходящая из города дорога, он ничего не указывает и улетает в следующий. Докажите: он может облететь все города по одному разу в таком порядке, что в результате его деятельности ни одна дорога не поменяет своего направления.