

3 ТУР ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДЫ СУНЦ МГУ. 10 КЛАСС

1. Решите уравнение $\sin(\frac{\pi}{2}[x]) = \cos(\frac{\pi}{2}\{x\})$. $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x ; $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть x .
2. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция (не являющаяся квадратом) с большим основанием AD и меньшим BC такая, что диагональ BD является биссектрисой угла ADC , а треугольник ADB равнобедренный. Найти отношение радиусов окружности, вписанной в треугольник ABD , и окружности, вписанной в треугольник BCD .
3. Даны два различных (то есть в одном из них есть хотя бы один элемент, не содержащийся в другом) набора простых чисел: $p_1, \dots, p_s$ и $q_1, \dots, q_r$. Может ли оказаться так, что выражения $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_s}$ и $\frac{1}{q_1} + \dots + \frac{1}{q_r}$ равны?
4. Дана шахматная доска 2021×2021 . Рома и Маргарита играют в игру: по очереди ставят в клетки доски ладьи. Игрок проигрывает, если после любого возможного для него хода все клетки на доске станут битыми. Рома ходит первым. Кто из них гарантированно может выиграть, как бы ни играл соперник, и почему?
5. Жаж возвел число 7 в некоторую степень и выписал результат на доску. После этого Жуж возвёл число 3 в ту же степень и тоже выписал на доску. Евгений утверждает, что разность чисел на доске делится на 143. Мог ли он не ошибиться?