

Третий тур олимпиады для 9-10 классов

Предпочтительная форма оформления работы – создание одного файла с решениями всех заданий, которые вы выполните (в том числе можно создать один файл из рукописных сканов работ). В этом случае за работу **начисляется один дополнительный балл**. Если, дополнительно, все решения, включая формулы, таблицы и другие необходимые для иллюстрации решения элементы, были набраны в текстовом редакторе (процессоре), то **начисляется еще один балл**.

Каждое задание само по себе вне зависимости от способа оформления оценивается из 6 баллов. В том числе **баллы снимаются за недостаточную строгость обоснования** даже при наличии правильного ответа. В некоторых задачах в качестве обоснования можно использовать текст компьютерной программы.

1. Результат вычисления выражения $81^{17} + 3^{24} - 45$ был записан в девятеричной системе счисления. Сколько цифр “8” он содержит? Ответ обосновать математически.
2. В театре есть N VIP мест. При заказе билета можно указать, какой блок из оставшихся мест вас интересует, и какое место в этом блоке подряд идущих мест вы хотите занять: левое, правое или среднее (если в блоке четное число мест, то в этом случае из двух средних мест выдается место с меньшим номером). В итоге все места были зарезервированы. Сколько различных последовательностей, в которых были выданы места, могло при этом быть.
Для $N = 3$ у нас есть 6 вариантов выдать места, но уже для $N = 4$ нельзя в качестве первого выбранного места получить место номер 3. Найдите ответ на эту задачу для $N = 4, 5, 9, 10$. Ответ обосновать.
3. Дана последовательность $A = (1, 5, 10, 3, 15, x, y, z)$. Сколько существует различных троек натуральных чисел (x, y, z) таких что длина наибольшей возрастающей подпоследовательности последовательности A будет равна 4? (подпоследовательность образуется из элементов последовательности A , не обязательно подряд идущими, но выписанными в том же порядке, в каком они шли в последовательности A). Напишите, как именно был получен ответ.
4. Дед Мороз играет на утреннике в игру Горячо-Тепло-Холодно. Он загадывает число от 1 до 100 включительно, а участники пытаются это число отгадать, называя числа из этого диапазона. В ответ Дед Мороз говорит:
 - “горячо”, если число было угадано;

- “тепло”, если названное число не верное, но отличается от верного не более чем на 5;
- “холодно” – в противном случае.

Какую стратегию нужно выбрать игрокам? За какое минимальное число вопросов участники могут отгадать загаданное число даже в худшем случае? Учтите, что им уже не надо задавать вопрос о числе, если они уже точно знают ответ, хотя именно про него еще не спрашивали.

5. Нам был дан массив из N различных чисел от 1 до N . По нему были получены два битовых массива, состоящих из нулей и единиц:
- 1) В первом из них на i -м месте стоит 1 тогда и только тогда, когда i -й элемент массива является локальным максимумом – больше обоих своих соседей или является крайним элементом массива и больше своего соседа.
 - 2) Во втором массиве на i -м месте стоит 1 тогда и только тогда, когда этот элемент является максимальным среди первых i элементов.

Нам поступают запросы на определение максимального элемента на интервале массива с L -го по R -й элементы включительно. В каких случаях мы можем дать ответ на такой запрос только по имеющимся двум битовым массивам? Какую еще информацию можно сохранить в битовом массиве, не обязательно по длине совпадающем с исходным, чтобы решить задачу в любом случае?