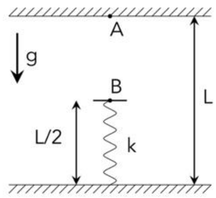
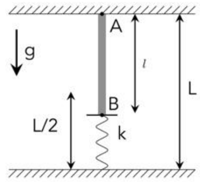
Задача №1



Для замыкания электрической цепи между точками Аи Внеобходимо вставить резистор цилиндрической формыминимально возможного сопротивления. Найдите значение этого сопротивления, если плотность материала резистора ρ_m, а его удельное сопротивление ρ_R.Пружина жесткостьюk невесома, ускорение свободного падения g.Расстояние от пола до потолка равно L, а длина пружины в недеформированном состоянии равна $L/2$.

Решение



Масса и сопротивление резистора равны

$$m = \rho_m lS,$$
$$R = \rho_R \frac{l}{S},$$

где l – длина резистора. В положении равновесия сила тяжести резистора будет уравновешена силой упругости пружины

$$\rho_m lSg = k\left(l - \frac{L}{2}\right).$$

Отсюда получим выражение для длины резистора

$$l = \frac{kL}{2(k - \rho_m Sg)},$$

тогда его сопротивление будет равно

$$R = \frac{\rho_R kL}{2S(k - \rho_m Sg)}.$$

Зависимость от площади резистора в знаменателе имеет вид квадратичной функции. Максимум знаменателя и, следовательно, минимум дроби достигается при

$$S = \frac{k}{2\rho_m g},$$

тогда само минимальное значение сопротивления равно

$$R_{min} = \frac{2\rho_R \rho_m gL}{k}.$$

Ответ

$$R_{min} = \frac{2\rho_R \rho_m gL}{k}$$

Задача №2

Найдите, какие значения может приниматьотношение массы воды, взятой при $10°$С,к массе льда, взятой при $-10°$С, если в результате смесь имеет температуру $0°$С. Тепловыми потерями пренебречь.Удельная теплоемкость воды $c_в = 4200\frac{Дж}{кг°C}$,удельная теплоемкость льда $c_л = 2100\frac{Дж}{кг°C}$, удельная теплота плавления льда$\lambda = 340000\frac{Дж}{кг}$

Решение

Пусть воды было достаточно много, чтобы в конечном состоянии все система находилась в жидком виде. Тогда уравнение теплового баланса будет иметь вид

$$m_в c_в(t_{10} - t_0) = m_л c_л(t_0 - t_{-10}) + m_л\lambda,$$

тогда

$$\frac{m_в}{m_л} = \frac{c_л(t_0 - t_{-10}) + \lambda}{c_в(t_{10} - t_0)} \approx 8{,}6.$$

Рассмотрим другой предельный случай, когда в конечном состоянии вся система находится в твердом состоянии

$$m_в c_в (t_{10} - t_0) + m_в \lambda = m_л c_л (t_0 - t_{-10}),$$

тогда

$$\frac{m_в}{m_л} = \frac{c_л (t_0 - t_{-10})}{c_в (t_{10} - t_0) + \lambda} \approx 5{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

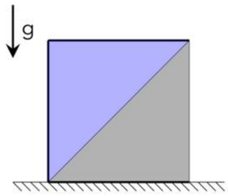
Если значение отношения масс будет винтервале$(5{,}5 \cdot 10^{-3};\ 8{,}6)$, то в конечном состоянии система будет представлять собой смесь воды и льда при нуле градусов.

Ответ

$$\frac{m_в}{m_л} \in [5{,}5 \cdot 10^{-3};\ 8{,}6]$$

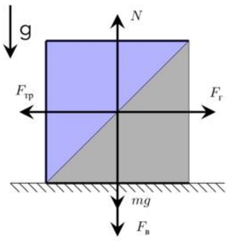
Задача №3

Тонкостенный сосуд выполнен в виде куба со стороной a в котором отсутствует одна боковая стенка. В сосуд вставлена треугольная призма так, что она занимает половину объема сосуда и полностью закрывает отверстие в сосуде (см. рис.). Плотность треугольной призмы равна плотности воды. Найдите коэффициент трения призмы о дно сосуда, если призма начинает движение при заполнении сосуда водой до краев через малое отверстие вверху сосуда.



Решение

Жидкость действует на призму как в вертикальном направлении, так и в горизонтальном. Сила, с которой жидкость действует на призму в вертикальном направлении равна весу жидкости



$$F_в = mg.$$

Масса призмы также равна m в силу равенства их объемов и плотностей. Сила, с которой жидкость действует на призму в горизонтальном направлении, не зависит от формы боковой поверхности, а зависит только от эффективной площади взаимодействия.Эта сила будет равна значению силы давления на вертикальную боковую поверхность

$$F_г = \frac{1}{2} mg.$$

На призму действуют сила тяжести, сила нормальной реакции опоры, сила трения,а также силы вертикального и горизонтального давления жидкости. Условие равновесия по вертикали и условие начала движения по горизонтали

$$N - mg - F_в = 0,$$
$$F_г - F_{тр} = 0,$$

т.к. начинается движение, то $F_{тр} = \mu N$.

Решая выписанные уравнения, получим

$$\mu = \frac{1}{4}.$$

Ответ

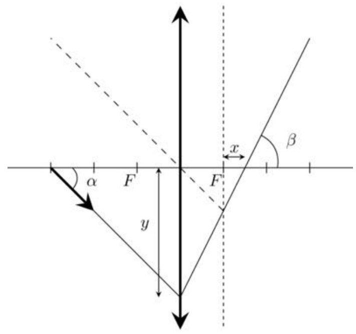
$$\mu = \frac{1}{4}.$$

Задача №4

Материальная точка движется под углом $\alpha = 45°$ к главной оптической оси тонкой собирающей линзы. Найдите, под каким углом к главной оптической оси движется изображение точки в тот момент, когда она находится на главной оптической оси на расстоянии трех фокусных расстояний от центра линзы.

Решение

Построим ход луча, направленного вдоль скорости. Для этого проведем вспомогательный луч параллельно исходному через оптический центр. Оба луча после прохождения линзы пересекутся в некоторой точке фокальной плоскости. Обозначим искомый угол за β, тогда



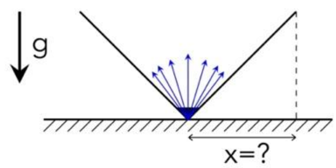
$$tg\ \beta = \frac{F\ tg\ \alpha}{x},$$
$$tg\ \beta = \frac{y}{F + x},$$
$$tg\ \alpha = \frac{y}{3F}.$$

Решая выписанные уравнения, получим
$$tg\ \beta = 2\ tg\ \alpha = 2.$$

Ответ
$$tg\ \beta = 2\ tg\ \alpha = 2$$

Задача №5

Пульверизатор, установленный на горизонтальной поверхности, распыляет краску в виде мельчайших капель с одинаковой начальной скоростью v во всех направлениях внутри конической поверхности с углом раствора $90°$. Ось конуса вертикальна, а распылитель находится в вершине этого конуса. Вся система симметрична относительна оси, проходящей через ось конуса. Определите, какого размера должна быть коническая поверхность, чтобы капли полностью окрасили ее и не попали на землю, перелетев поверхность.В качестве ответа приведите удаление любой крайней точки конической поверхности от распылителя по горизонтали. Ускорение свободного падения g.



Решение

Уравнение траектории для капли, вылетающей под некоторым углом αна плоскости XY, содержащей все точки траектории:
$$y(x) = -\frac{gx^2}{2v^2}tg^2\ \alpha + x\ tg\ \alpha - \frac{gx^2}{2v^2}.$$
Рассмотрим данную функцию как функцию только от $tg\alpha$, т.е. зафиксируем значение x. Тогда максимум yдостигается при
$$tg\ \alpha_{\text{в}} = -\frac{x}{2\left(-\frac{gx^2}{2v^2}\right)} = \frac{v^2}{gx},$$
а соответствующий максимум yуравен
$$y_{max}(x) = \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2}.$$

Капли не перелетят через коническую поверхность в том случае, если максимальное значение координаты yкапель на краю поверхности не будет превосходить координаты yповерхности. Таким образом, необходимо найти координату xточки пересечения $y_{max}(x)$и $y = x$
$$x = \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2}.$$
Решая последнее уравнение, получим

$$x = \left(\sqrt{2} - 1\right)\frac{v^2}{g}.$$

Ответ

$$x = \left(\sqrt{2} - 1\right)\frac{v^2}{g}$$