3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ. 9 класс

1. Виктория Владимировна нарисовала на доске два прямоугольных треугольника. Вася заметил: если перемножить длины двух меньших катетов, перемножить длины двух больших катетов и перемножить длины их гипотенуз, то из отрезков получившихся длин можно опять сложить прямоугольный треугольник. Не ошибся ли он?
Решение. Вася крупно ошибся. Пусть $a \leq b < c$ — стороны первого из нарисованных треугольников, $x \leq y < z$ — стороны второго. Треугольники прямоугольные, поэтому
$$x^2 + y^2 = z^2,$$
откуда домножением на a^2 получаем равенство: $a^2x^2 + a^2y^2 = a^2z^2$.
Вася предположил, что треугольник со сторонами $ax \leq by < cz$ тоже прямоугольный, то есть $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2z^2$. Вычитая из этого равенства предыдущее, получим:
$$y^2(b^2 - a^2) = z^2(c^2 - a^2).$$
Но $y^2 < z^2$, а $0 \leq b^2 - a^2 < c^2 - a^2$, поэтому такое равенство невозможно.

2. Последовательность a_n задана правилом: $a_{n+1} = \frac{1}{2+a_n}$. Пусть мы выбрали такое a_0, что для всех n $a_{n+4} = a_n$. Докажите, что $a_{n+2} = a_n$.
Решение. Найдём зависимость элемента a_{n+4} от a_n:
$$a_{n+2} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+a_n}} = \frac{2 + a_n}{5 + 2a_n};$$
$$a_{n+4} = \frac{2 + a_{n+2}}{5 + 2a_{n+2}} = \frac{2 + \frac{2+a_n}{5+2a_n}}{5 + 2\frac{2+a_n}{5+2a_n}} = \frac{12 + 5a_n}{29 + 12a_n}.$$
Запишем условие того, что $a_{n+4} = a_n$:
$$a_n = \frac{12 + 5a_n}{29 + 12a_n},$$
откуда
$$12a_n^2 + 24a_n - 12 = 0, (a_n + 1)^2 = 0$$
и либо $a_n = -1 + \sqrt{2}$, либо $a_n = -1 - \sqrt{2}$. В обоих случаях $a_{n+1} = a_n$, и последовательность постоянна (либо состоит только из чисел $-1 + \sqrt{2}$, либо только из чисел $-1 - \sqrt{2}$). В частности, $a_{n+2} = a_n$.

3. Из бумаги вырезали правильный восьмиугольник со стороной 2021. Маргарита и Рома играют в игру: по очереди вырезают либо треугольник, либо четырёхугольник с целой площадью. Игрок проигрывает, если он не может сделать ход. Рома ходит первым. Кто из них гарантированно может выиграть, как бы ни играл соперник, и почему?
Решение. Выигрывает всегда Рома.
Заметим, что игроки вырезают фигуры с целой площадью из фигуры с конечной плоскостью, значит, игра гарантированно прервётся на каком-то шаге, и мы определим победителя и проигравшего.
Стратегия Ромы проста: первым шагом он должен вырезать вертикальный прямоугольник 1×2021, содержащий центральную клетку. После этого оставшаяся часть восьмиугольника распадается на две равные фигуры; на любом ходу Маргарита вырезает что-то из одной из этих фигур, а Рома повторяет то же действие с другой. Таким образом, Рома гарантированно может сделать ход, если ход перед этим смогла сделать Маргарита.

4. На продолжении высоты BH тупоугольного ($\angle B > \frac{\pi}{2}$) треугольника ABC отметили точку K такую, что $\angle BKA = \angle BCA$. Пусть высота KF треугольника BKA пересекает прямую CA в точке R. Докажите, что треугольники KHA и BHR подобны.
Решение. Докажем лемму: точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно основания любой из его высот, лежит на описанной окружности треугольника.
Доказательство. Возьмем треугольник XYZ с высотами XX_1, XX_2, XX_3 и ортоцентром H. Пусть точка K симметрична точке H относительно X_1, то есть треугольники HZY и KZY равны. Поэтому $\angle YKZ = \angle YHZ = \angle Z_1HY_1 = 180 - \angle Z_1XY_1$, поскольку четырехугольник Z_1HY_1X вписанный (имеет два противоположных прямых угла). Значит, четырёхугольник $XYKZ$ тоже вписанный.
Перейдём к решению задачи.
Из равенства углов BKA и BCA заключаем, что точки K, C, B, A лежат на одной окружности; точка C лежит на прямой AH и на описанной окружности треугольника AKB, значит, она симметрична ортоцентру R треугольника AKB относительно точки H (такая точка лишь одна, и по лемме точка, симметричная ортоцентру, удовлетворяет этим свойствам). Значит, в частности, $\angle HRB = \angle HCB = \angle AKH$; тогда треугольники KHA и BHR прямоугольные и имеют равные углы, то есть подобны.
Комментарий. В задаче, вообще говоря, могут быть разные случаи: точка R может лежать на стороне треугольника, а может на её продолжении. Лемма позволяет не рассматривать их по отдельности.

5. В стране N все города соединены дорогами с соблюдением следующих правил:

   (a) По каждой дороге можно проехать только в одну сторону;
   (b) Выехав из города по дороге, невозможно вернуться обратно по дорогам.

   Министр транспорта решил провести дорожную реформу. Он по очереди летает по городам и раздает указы: если в какой-то город дороги только входят и ни одна не выходит, он указывает развернуть направление движения по каждой из них; если есть хоть одна выходящая из города дорога, он ничего не указывает и улетает в следующий. Докажите: он может облететь все города по одному разу в таком порядке, что в результате его деятельности ни одна дорога не поменяет своего направления.
Решение. Сначала докажем, что есть хотя бы один город, откуда не выходит ни одна дорога. Начнем двигаться по дорогам; если из каждого города на нашем пути мы сможем выехать, то путешествие можно продолжать неограниченно. Но количество городов конечно, значит, в какой-то момент мы окажемся повторно в городе, где уже были. Это противоречит пункту (b) условия.
Выделим все такие города и последовательно (в любом порядке) изменим направления связанных с ними дорог. Заметим, что дорога может входить только в один из этих городов, следовательно, каждая дорога поменяла направление лишь один раз.
Сотрем с карты все города, в которых мы уже побывали, и связанные с ними дороги (заметим, что все эти дороги выходят из стертых городов и входят в города, где мы еще не были). Оставшаяся часть карты также удовлетворяет условиям (a) и (b), значит, мы опять можем поменять направления у дорог, связанных с какими-то городами, и т. д. Мы производим такую операцию до тех пор, пока не стираем с карты все города.
Итого: в каждом городе мы побывали по 1 разу. В частности, для любой фиксированной дороги мы по разу посещали каждый из её концов, то есть два раза меняли направление. Таким образом, направления всех дорог остались неизменными.
Комментарий. В задаче не предполагалось, что каждый город связан с каждым другим прямой дорогой (что граф дорог полный). Известно лишь, что из каждого города можно проехать в любой другой, то есть граф дорог связен.