3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ. 10 класс

1. Решите уравнение $sin(\frac{\pi}{2}[x]) = cos(\frac{\pi}{2}\{x\})$. $[x]$ *— это наибольшее целое число, не превосходящее x; $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть x.*
   Решение. $sin\frac{\pi}{2}[x] = cos\frac{\pi}{2}(x - [x]) = cos\frac{\pi}{2}xcos\frac{\pi}{2}[x] + sin\frac{\pi}{2}xsin\frac{\pi}{2}[x]$. Обозначим целое число $[x]$ за a и рассмотрим 4 возможных случая:

   - $a \equiv 0(mod4)$: тогда $sin\frac{\pi}{2}[x] = sin\frac{\pi}{2}a = 0$, и уравнение принимает вид $0 = cos\frac{\pi}{2}x$;
   - $a \equiv 1(mod4)$: тогда $sin\frac{\pi}{2}[x] = sin\frac{\pi}{2}a = 1$, и уравнение принимает вид $1 = sin\frac{\pi}{2}x$;
   - $a \equiv 2(mod4)$: тогда $sin\frac{\pi}{2}[x] = sin\frac{\pi}{2}a = 0$, и уравнение принимает вид $0 = -cos\frac{\pi}{2}x$;
   - $a \equiv 1(mod4)$: тогда $sin\frac{\pi}{2}[x] = sin\frac{\pi}{2}a = 1$, и уравнение принимает вид $-1 = -sin\frac{\pi}{2}x$.

   Заметим, что при четных a $(a \equiv 0, 2(mod4))$ уравнение приняло вид $0 = cos\frac{\pi}{2}x$; решения такого уравнения — это все $x = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$, то есть нечётные числа. Значит, $a = [x] = x = 1 + 2k$ и должно быть нечётным числом — этот вариант нам не подходит.
   При нечётных a $(a \equiv 1, 3(mod4))$ уравнение приняло вид $1 = sin\frac{\pi}{2}x$, откуда $x = 1+4k, k \in \mathbb{Z}$. Все такие x являются нечётными числами, следовательно, подходят нам в качестве ответа.
   Ответ: Решения — все числа $x = 1 + 4k, k \in \mathbb{Z}$.

2. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция (не являющаяся квадратом) с большим основанием AD и меньшим BC такая, что диагональ BD является биссектрисой угла ADC, а треугольник ADB равнобедренный. Найти отношение радиусов окружности, вписанной в треугольник ABD, и окружности, вписанной в треугольник BCD.
   Решение. Поскольку $ABCD$ — вписанная, то из равенства углов следует равенство дуг, а из равенства дуг равенство хорд; поэтому $AB = BC = CD$. Будем считать их равными 1.
   Если в треугольнике ABD $AB = BD$, то $\angle BAD = \angle ADB = \angle ADC$, и точки B, C, D лежат на одной прямой, что невозможно. Если $AB = AD$, то все стороны трапеции равны, и она является квадратом, что противоречит условию. Стало быть, $AD = BD$.
   Обозначим углы BDA и BDC за α; из равнобедренности трапеции $\angle BAD = 2\alpha = \angle ABD$, и из суммы углов треугольника ABD $5\alpha = 180$; $\alpha = 36$. Этот факт нам в решении не понадобится.
   Проведём отрезок BT параллельно CD и обозначим за x длину стороны $AD = BD$. Треугольник ABT — равнобедренный $(AB = BT = 1)$ с углами $\alpha, 2\alpha, 2\alpha$, поэтому $AT = 2cos2\alpha$; поскольку $BTDC$ — ромб со стороной 1, $AD = x = 1+2cos2\alpha$. С другой стороны, из рассмотрения равнобедренного треугольника ADB получаем: $1 = 2xcos2\alpha$; $2cos2\alpha = \frac{1}{x}$. Подставив в предыдущее уравнение, получим:

$$x = 1 + \frac{1}{x},$$

$$x^2 - x - 1 = 0;$$

   отсюда $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   Обозначим радиус вписанной окружности треугольника ABD за R и радиус вписанной окружности треугольника BCD за r;
   $S(ABD) = \frac{1}{2}x \cdot h = \frac{1}{2}R \cdot (AD + BD + AB) = \frac{1}{2}R(2x + 1)$;
   $S(BCD) = \frac{1}{2} \cdot h = \frac{1}{2}r \cdot (BC + CD + BD) = \frac{1}{2}r \cdot (2 + x)$,
   и из деления одного на другое

$$x = \frac{R(2x + 1)}{r(2 + x)};$$

   $\frac{R}{r} = \frac{x(2+x)}{2x+1} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{)}(\frac{5+\sqrt{5}}{2})}{2+\sqrt{5}} = \frac{10+6\sqrt{5}}{8+4\sqrt{5}}$.

3. Даны два различных (то есть в одном из них есть хотя бы один элемент, не содержащийся в другом) набора простых чисел: $p_1, ..., p_s$ и $q_1, ..., q_r$. Может ли оказаться так, что выражения $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_s}$ и $\frac{1}{q_1} + ... + \frac{1}{q_r}$ равны?
Решение. Пусть без ограничения общности в первом наборе есть простое число p, которое отсутствует во втором наборе. Обозначим за P произведение всех простых чисел из обоих наборов, исключая число p.
Предположим, что $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_s} = \frac{1}{q_1} + ... + \frac{1}{q_r}$; перенесем все слагаемые, кроме $\frac{1}{p}$, в правую часть. Выражение в правой части — дробь, которая приводится к общему знаменателю P. Обозначим её числитель за a; мы получили равенство

$$\frac{1}{p} = \frac{a}{P},$$

откуда (поскольку p и P не равны 0)

$$a \cdot p = P.$$

Мы получили равенство, левая часть которого делится на простое число p, а правая не делится. Значит, наше предположение было неверным.
Комментарий. Разумеется, в задаче предполагалось, что внутри каждого из наборов все простые числа попарно различны.

4. Дана шахматная доска 2021×2021. Рома и Маргарита играют в игру: по очереди ставят в клетки доски ладьи. Игрок проигрывает, если после любого возможного для него хода все клетки на доске станут биться. Рома ходит первым. Кто из них гарантированно может выиграть, как бы ни играл соперник, и почему?
Решение. Выиграет Маргарита.
Рассмотрим ход игрока, который гарантированно проигрывает. Перед его ходом существует небитая клетка (i, j) такая, что, куда бы он ни поставил ладью, она окажется бита.
Клетка не бита, значит, "крест"с центром в этой клетке (т. е. объединение i-го столбца и j-й строки) пуст; клетка окажется бита после его хода, значит, кроме этого "креста"ладью ставить некуда, т. е. других пустых клеток нет.
Получается, перед его ходом должно быть занято $2021 \cdot 2021 - 2021 - 2020$ клеток (крест содержит $2021 + 2020$), то есть чётное число. Значит, ход проигравшего — нечётный, то есть проигрывает всегда Рома.

5. Жаж возвел число 7 в некоторую степень и выписал результат на доску. После этого Жуж возвёл число 3 в ту же степень и тоже выписал на доску. Евгений утверждает, что разность чисел на доске делится на 143. Мог ли он не ошибиться?
Решение. Разложим 143 на простые множители: $143 = 11 \cdot 13$. Перебор остатков позволяет заметить, что числа $3^{10} - 1$ и $7^{10} - 1$ делятся на 11, а $3^{12} - 1$ и $7^{12} - 1$ делятся на 13. Пусть $a^k - 1$ делится на n; тогда для любого m число $a^{km} - 1$ тоже делится на n:

$$a^{km} - 1 = a^{km} - a^{k(m-1)} + a^{k(m-1)} - a^{k(m-2)} + ... + a^k - 1 = (a^{k(m-1)} + a^{k(m-2)} + ... + 1)(a^k - 1),$$

где второй множитель кратен n. Получается, число $3^{120} - 1$ делится и на 11, и на 13, то есть делится на 143; аналогичное верно для числа $7^{120} - 1$.
Но если для каждого из чисел это верно, то это верно и для разности. Таким образом, Евгений мог не ошибиться: например, если числа были возведены в 120 степень.