Текст не дописан. Сюда нужно добавить:

1. Другие примеры диаграмм с весами; другие примеры обобщенных диаграмм;
2. Оптимальный алгоритм "Разделяй и властвуй"с подробным описанием реализации;
3. Алгоритм перестройки существующей диаграммы при добавлении новой точки;
4. Описание алгоритмов для построения обобщенных диаграмм в соответствии с определением 4 (в частности, обобщение алгоритма "Разделяй и властвуй");
5. Еще какие-нибудь геометрические свойства разбиения наподобие пункта 2.

1 Стандартная диаграмма Вороного

Нам даны $n \geq 2$ точек на плоскости: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. В дальнейшем будем считать, что никакие три из этих точек не лежат на одной прямой (точки общего положения). Давайте сопоставим i-й из них множество точек, для которых точка p_i — ближайшая из $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Такие области образуют разбиение плоскости, причем разбиение на многоугольники (конечные или бесконечные); оно называется *Диаграммой Вороного*, построенной по множеству точек $\{p_i\}$. Более формально, дадим

Определение 1. Пусть $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ — множество из $2 \leq n < \infty$ попарно различных точек; для произвольных точек a и b плоскости обозначим через $\| a - b \|$ расстояние от a до b.

Назовем $V_i = V(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \| x - p_i \| \leq \| x - p_j \|, j = 1, 2, \ldots, n\}$ *обыкновенным многоугольником Вороного* точки p_i, а множество $V = \{V(p_1), V(p_2), \ldots, V(p_n)\}$ — *разбиением* или *диаграммой Вороного*, порожденной множеством P. Точку p_i назовем *порождающей* для множества $V(p_i)$, а множество P — порождающим для диаграммы Вороного.

Мы можем дать аналогичное определение диаграммы Вороного и для множества, состоящего из бесконечного числа точек; этот случай, однако, пока что не представляет интереса, и мы не будем его рассматривать.

Неравенства в определении диаграммы Вороного нестрогие; это означает, что многоугольники Вороного мы рассматриваем вместе с их ребрами и вершинами, то есть границей (иначе говоря, разбиение состоит из замкнутых множеств). Ребра всех многоугольников V_i, обозначаемые e_i, образуют ребра разбиения Вороного; вершины этих многоугольников вместе составляют вершины разбиения. В дальнейшем для простоты будем считать, когда нам это понадобится, что в каждой вершине разбиения сходится ровно три ее ребра.

Существует и альтернативный подход к определению диаграмм Вороного, позволяющий конструктивно строить нужное нам разбиение:

Назовем *биссектором* для точек p_i и p_j серединный перпендикуляр к отрезку $[p_i p_j]$ и обозначим его $b(p_i, p_j)$; биссектор разбивает плоскость на две части, $H(p_i, p_j)$ и $H(p_j, p_i)$. $H(p_i, p_j) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \| x - p_i \| \leq \| x - p_j \|\}$ —- множество точек, расположенных ближе к p_i, чем к p_j. Очевидно, $H(p_i, p_j)$ — полуплоскость; назовем её *областью близости* точки p_i относительно точки p_j.

Упражнение. Доказать, что $V(p_i) = H(p_i, p_1) \bigcap H(p_i, p_2) \bigcap \cdots \bigcap H(p_i, p_n)$ и действительно является многоугольником (ограниченным или неограниченным).

Определение 2. Пусть $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$ — множество из $2 \leq n \leq \infty$ попарно различных точек. Назовем $V_i = V(p_i) = H(p_i, p_1) \bigcap H(p_i, p_2) \bigcap \cdots \bigcap H(p_i, p_n)$ *обыкновенным многоугольником Вороного* точки p_i, а множество $V = \{V(p_1), V(p_2), \ldots, V(p_n)\}$ — *разбиением* или *диаграммой Вороного*, порожденной множеством P.

Заметим, что, определив соответствующим образом биссекторные плоскости и *полупространства близости* для $\mathbb{R}^3$, мы можем перенести оба определения без изменений в трехмерное пространство (тогда многоугольники Вороного заменятся на многогранники), а аналогично и в векторное пространство $\mathbb{R}^d$ произвольной размерности.

Основные свойства разбиения Вороного.

1. Многоугольник Вороного — выпуклое множество.
2. Любой многоугольник Вороного непуст; любая точка плоскости принадлежит хотя бы одному из многоугольников, то есть они покрывают всю плоскость.
3. Никакие два многоугольника Вороного не имеют общих точек, кроме точек на их границе; они образуют разбиение плоскости.
4. Многоугольник Вороного $V(p_i)$ неограничен тогда и только тогда, когда точка p_i лежит на границе выпуклой оболочки множества P.

Доказательство. Предположим, точка p_i лежит внутри выпуклой оболочки множества P. Тогда на границе его выпуклой оболочки найдутся вершины $p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}$ (все вершины на границе выпуклой оболочки — это точки множества P) такие, что p_i лежит внутри треугольника $\Delta = p_{i_1}p_{i_2}p_{i_3}$. Значит, $\Delta = H(p_i, p_{i_1}) \bigcap H(p_i, p_{i_2}) \bigcap H(p_i, p_{i_3})$; но по определению $V(p_i) = H(p_i, p_1) \bigcap H(p_i, p_2) \bigcap \cdots \bigcap H(p_i, p_n) \subset H(p_i, p_{i_1}) \bigcap H(p_i, p_{i_2}) \bigcap H(p_i, p_{i_3}) = \Delta$, то есть V_i целиком лежит в треугольнике Δ. Значит, V_i ограничен.
Обратно, пусть многоугольник V_i ограничен, а $e(p_i, p_j), j \in J$ — все его ребра. Точки p_i и p_j симметричны относительно $e(p_i, p_j)$; несложно проверить, что p_i содержится внутри многоугольника с вершинами $\{p_j\}, j \in J$.

5. Если p_j — ближайшая к p_i точка из P, то $e(p_i, p_j)$ будет ребром многоугольника $V(p_i)$; соответственно, ближайшая к p_i точка множества P — одна из симметричных ей относительно ребер V_i.

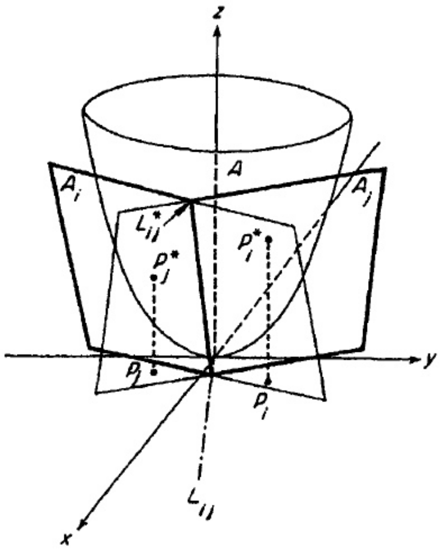
Упражнение. Аккуратно доказать основные свойства.
Некоторые комбинаторные свойства разбиения Вороного. Обозначим количество точек в порождающем множестве диаграммы Вороного за n, количество ребер в диаграмме — за n_e, а количество вершин — за n_v.

1. $n_v - n_e + n = 1$. (Следует из формулы Эйлера: В-Р+Г $= 2$ — однако, напрямую применить ее в таком виде к диаграмме нельзя).
2. При $n \geq 3$
   $n_e \leq 3n - 6$;
   $n_v \leq 2n - 5$.
3. При $n \geq 3$
   $n_v \geq \frac{1}{2}(n - n_c) + 1$;
   $2n_e \leq 3n_v - 3$.

Упражнение. Доказать комбинаторные свойства.

2 Об одной геометрической интерпретации

Нередко для рассуждения о, казалось бы, плоских объектах оказывается полезным рассмотрение этого плоского объекта в каком-то объемлющем пространстве. Следующий неожиданный и красивый метод построения диаграммы Дирихле использует именно это идею.
$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ — множество точек общего положения на плоскости с декартовыми координатами $(x_i, y_i, 0)$, A — параболоид вращения, задаваемый уравнением $x^2 + y^2 = z$. Обозначим за p_i^* точку, в которую перешла p_i при "поднятии"на параболоид, то есть точку с координатами $(x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2)$. Проведем в точках p_i^* касательные плоскости A_i к параболоиду A и обозначим за H_i то из отделяемых плоскостью A_i полупространств, в котором лежит параболоид A; пересечение всех H_i образует выпуклый многогранник G (он непуст и даже неограничен — в нем содержится весь параболоид A).



Теорема 1. Проекция многогранника G на плоскость $z = 0$ задает разбиение Вороного для множества точек P, а именно: вершины многогранника при проекции определяют вершины разбиения, ребра задают ребра разбиения.
Доказательство. Уравнение касательной плоскости A_j можно найти, построив касательные прямые в двух сечениях параболоида, содержащих точку p_j^*: проходящем через ось и параллельном плоскости $z = 0$. Оно будет иметь вид $z = 2x_i x + 2y_i y - (x_i^2 + y_i^2)$; прямая пересечения плоскостей A_i и A_j, соответственно, находится как множество точек, удовлетворяющих уравнениям для A_i и A_j одновременно. Ее проекция на плоскость $z = 0$ получается в результате исключения из системы переменной z и имеет вид $2(x_i - x_j)x + 2(y_i - y_j)y - (x_i^2 + y_i^2 - x_j^2 - y_j^2) = 0$. Несложно проверить, что это уравнение задает биссектор точек p_i и p_j; соответствующая полуплоскость плоскости A_i при проекции переходит в $H(p_i, p_j)$, а грани G, соответственно, — в многоугольники Вороного.
Упражнение. Придумать геометрическое доказательство *Теоремы 1.*

3 Обобщенные диаграммы Вороного

Стандартная диаграмма Вороного — простейший пример разбиения плоскости на множества, каждое из которых по какому-то правилу сопоставляется элементу из заранее заданного набора. Попробуем найти общую формализацию и общий подход к построению подобных разбиений.
Рассмотрим непустое множество S и *порождающее множество* $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$, состоящее из n различных попарно непересекающихся подмножеств A_i множества S ($A_i \subset S; A_i \bigcap A_j = \emptyset$). Определим правило, которое каждому элементу p из множества S сопоставляет хотя бы одно из подмножеств A_j; его можно записать в виде отображения δ, сопоставляющего точке $p \in S$ и множеству $A_j \in A$ число 1 или число 0 в зависимости от того, сопоставляем мы точке p подмножество A_j или нет.
Иными словами, $\delta(p, A_j) = \begin{cases} 1, A_j \text{ сопоставляется точке } p; \\ 0, A_j \text{ не сопоставляется точке } p. \end{cases}$
Правило δ позволяет нам определить подобие многоугольников Вороного, а вместе с ними и обобщенное разбиение.
Определение 3. Пусть заданы множество S (вообще говоря, с топологией), множество его различных непересекающихся подмножеств $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ и отображение $\delta : S \times$

$A \longrightarrow \{0,1\}$, на любом p из S принимающее не только нулевые значения. Множество $V(A_j) = \{p : \delta(p, A_j) = 1\}$ из всех точек S, сопоставляемых множеству A_j, назовем *обобщенным многоугольником Вороного*, а соответствующее ему разбиение $V(A, \delta, S) = \{V(A_1), V(A_2), \ldots, V(A_n)\}$ — *обобщенным разбиением Вороного*, построенным по множеству S, порождающему множеству A и отображению δ. *Ребрами* этого разбиения назовем $e(A_i, A_j) = V(A_i) \bigcap V(A_j)$.

Пример 0. В обычном разбиении Вороного в качестве множества S берется вся евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$, в качестве A — множество P точек на плоскости, а сопоставление δ работает так: $\delta(p, p_i) = 1$, если для всех j выполнено условие $\| p - p_i \| \leq \| p - p_j \|$, и $\delta(p, p_i) = 0$, если какое-то из этих расстояний больше $\| p - p_i \|$.

Чтобы в общем случае это определение действительно задавало объект, аналогичный разбиению Вороного, нам нужно добавить еще несколько свойств:

1. Все $V(A_j)$ — замкнутые множества, то есть содержат свою границу;
2. Хотя бы два из $V(A_j)$ непустые, и все $V(A_j)$ имеют ненулевую площадь/объем (или, в общем случае, ненулевую меру);
3. Любые $V(A_i)$ и $V(A_j)$ могут пересекаться только по точкам своей границы, то есть ребра разбиения состоят только из точек на границах многоугольников.

В случае классической диаграммы Вороного нам было удобно давать ей второе эквивалентное определение, не раскрывающее явно суть объекта, но облегчающее доказательства и построения. Можно поступить так и в обобщенном случае: если *Определение 3* было аналогично *Определению 1*, то *Определение 4* обобщает *Определение 2*.

Зададим для каждой пары (A_i, A_j) разбиение всего множества S на две области (по аналогии назовем их *областями близости* Dom_{ij} и Dom_{ji}, удовлетворяющие свойствам 1-3; их пересечение $b(A_i, A_j) = Dom_{ij} \bigcap Dom_{ji}$ назовем *биссектором* подмножеств A_i и A_j.

Определение 4. Пусть заданы множество S (с топологией), множество его различных непересекающихся подмножеств $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ и для каждой пары A_i, A_j фиксировано разбиение на области близости. Пересечение всех областей близости для подмножества A_j $V(A_j) = Dom_{j1} \bigcap Dom_{j2} \bigcap \cdots \bigcap Dom_{jn}$ назовем *обобщенным многоугольником Вороного*, а соответствующее ему разбиение $V(A, \delta, S) = \{V(A_1), V(A_2), \ldots, V(A_n)\}$ — *обобщенным разбиением Вороного*. Как и в случае *Определения 3*, нам понадобятся соответствующие дополнительные свойства этих объектов:

1. Все Dom_{ij} — замкнутые множества, то есть содержат свою границу;
2. Все Dom_{ij} имеют ненулевую площадь/объем (или, в общем случае, ненулевую меру);
3. Любые Dom_{ij} и Dom_{ji} могут пересекаться только по точкам своей границы, то есть биссекторы состоят только из точек на границах многоугольников.

4 Примеры обобщенных диаграмм: диаграммы с весами

Самым естественным и интуитивно понятнымм обобщением стандартных диаграмм являются диаграммы с весами: они отличаются от стандартных только тем, что вместо расстояния для построения областей используется функция, меряющая "близость"с поправкой на вес точки (приписанное ей значение).

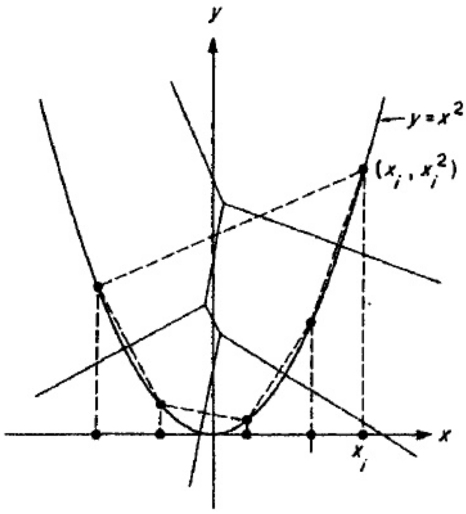
Формально: пусть $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^m$ — множество из $2 \leq n \leq \infty$ попарно различных точек, и каждой точке p_i приписано какое-то число w_i, называемое *весом* этой точки. Зададим функцию $d_W(p, p_i)$ — функцию, определяющую аналог расстояния (при этом расстояние до точки p_i зависит от веса точки p_i). Определим Dom_{ij} так: $Dom_{ij} = \{p : d_W(p, p_i) \leq d_W(p, p_j)\}$.

Определение 5. Множества $V(A_j) = Dom_{j1} \bigcap Dom_{j2} \bigcap \dots \bigcap Dom_{jn}$ задают многогранники Вороного, а $V(P, d_W, \mathbb{R}^m) = \{V(A_1), \dots, V(A_n)\}$ — разбиение Вороного пространства $\mathbb{R}^m$, построенное по множеству P и весовому расстоянию d_W.
Пример 1: диаграммы с мультипликативными весами. Если функция $d_W(p, p_i) = \frac{1}{w_i} \parallel p - p_i \parallel$ при каких-то весах w_i, то построенная по ней диаграмма Вороного называется *диаграммой Вороного с мультипликативными весами.*
Утверждение. Если $m = 2$, то биссектор точек p_i и p_j — это их окружность Аполлония, соответствующая соотношению весов w_i и w_j. В таком случае многоугольники разбиения Вороного будут фигурами, ограниченными дугами окружностей.
Пример 2: диаграммы с аддитивными весами. Зададим функцию $d_W(p, p_i) = \parallel p - p_i \parallel - w_i$. Для такой функции множество Dom_{ij} примет вид $Dom_{ij} = \{p : \parallel p - p_i \parallel - \parallel p - p_j \parallel \leq w_i - w_j\}$. Построенная по такой функции диагиамма Вороного называется *диаграммой Вороного с аддитивными весами.*

5 Алгоритмы

Наша следующая цель — исследовать алгоритмы, позволяющие строить диаграмму Вороного. Начнем мы с рассмотрения самого простого случая — стандартной диаграммы Вороного.
Алгоритм 1 (простейший алгоритм). Этот алгоритм основан непосредственно на *Определении 2* стандартного разбиения Вороного.
Входные данные: Множество точек $P = \{p_j\}$: например, заданное декартовыми координатами (x_i, y_i) (но не обязательно!).
Результат работы: Диаграмма Вороного для множества точек P.
Процедура алгоритма: В начале полагаем $i = 1$.
Шаг 1. Построить для данного i последовательно все полуплоскости $H(p_i, p_j), j \neq i$;
Шаг 2. Построить пересечение получившихся на прошлом шаге полуплоскостей $H(i, 1) \bigcap \dots \bigcap H(i, n)$; это и будет $V(p_i)$.
Шаг 3. Перейти к шагу 1 для $i + 1$, если $i < n$; иначе ответ — $V = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$.
Алгоритм 1 очень понятен и удобен в использовании на малом количестве данных, однако неэффективен. Оценим время, которое требуется ему на работу:
Нахождение полуплоскости $H(a, b)$ — задача, решаемая за какое-то определенное количество действий вне зависимости от точек a и b: любой алгоритм построения полуплоскости совершает одни и те же операции при любых поступивших координатах a и b. Обозначим количество этих операций за ; значит, сложность первого шага для каждого i равна $C(n-1)$. Суммируя по всем i, получаем $Cn(n-1)$.
Построение многоугольника $V(p_i)$ будем проводить последовательно: на k-м шаге мы пересекаем уже построенный не более чем k-угольник с новой полуплоскостью. Это построение требует последовательно найти пересечение нашей полуплоскости с каждым из k звеньев; на каждое такое пересечение требуется какое-то число, скажем, D операций. Тогда сложность построения одного многоугольника — не более чем $D + 2D + \dots + D(n-2) = D\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Суммируя по i, имеем $D\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$; общая оценка количества операций, т. е. и времени работы — $T(n) = Cn(n-1) + D\frac{n(n-1)(n-2)}{2} = O(n^3)$.
Описанный алгоритм построения многоугольника не является оптимальным: более сложные алгоритмы для пересечения плоскостей позволяют получить $T(n) = O(n^2 logn)$.
Попробуем оценить минимально возможное время работы для произвольного алгоритма, строящего диаграмму Вороного для n произвольных точек на плоскости. Для этого нам потребуется 2 вспомогательных утверждения, которые мы приводим без доказательства:
Утверждение 1. Любой алгоритм, сортирующий набор из n действительных чисел, имеет сложность хотя бы $O(nlogn)$.

Утверждение 2. Пусть у нас есть некоторое разбиение Вороного V, построенное по множеству $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Существует алгоритм, перечисляющий против часовой стрелки все вершины выпуклой оболочки P и имеющий сложность $O(n)$.
Теорема 2. Сложность алгоритма построения диаграммы Вороного не может быть меньше, чем $O(nlogn)$.
Доказательство. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество действительных чисел. Построим по этому множеству X множество P точек на плоскости: $P = \{(x_1, x_1^2), \dots, (x_i, x_i^2), \dots, (x_n, x_n^2)\}$.



От противного: предположим, существует алгоритм, строящий диаграмму Вороного быстрее, чем за $O(nlogn)$. Построим диаграмму для P за $T(n) \ll O(nlogn)$: из *утверждения 2* мы можем перечислить все точки на выпуклой оболочке P против часовой стрелки за время $O(n)$. Но точки p_i расположены на параболе, т.е. все p_i лежат на выпуклой оболочке P. Перечисляя их против часовой стрелки, мы перечисляем по возрастанию абсциссы; стало быть, мы отсортировали абсциссы наших точек, т.е. числа x_i, за время $T(n) + O(n) \ll O(nlogn)$ (причем в качестве множества X бралось произвольное множество чисел) — противоречие с утверждением 1.

6 О книжках

1. Atsuyuki Okabe — Spatial Tesselations: Concepts And Applications of Voronoi Diagrams, Chapter 2, 3, 4;
2. Herbert Edelsbrunner — что-то близкое есть почти во всех его книжках.