Цепные дроби: введение и забавные теоремы

$$[\text{Н}, \text{И}, \text{К}, \text{И}, \text{Т}, \text{А}] = \text{Н} + \cfrac{1}{\text{И} + \cfrac{1}{\text{К} + \cfrac{1}{\text{И} + \cfrac{1}{\text{Т} + \cfrac{1}{\text{А}}}}}}$$

Формальное определение:

Пусть a_0, a_1, ... - переменные; определим многочлены p_0, p_1, ... и q_0, q_1, ... , где p_n и q_n - многочлены от переменных a_0, a_1, ..., a_n. Положим $p_0 = a_0$ и $q_0 = 1$. Далее, введём обозначение

$$p'_k = p_k(a_1, a_2, ..., a_{k+1}) \qquad q'_k = q_k(a_1, a_2, ..., a_{k+1})$$

и определим индуктивно:

$$p_n = a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1} \qquad q_n = p'_{n-1}$$

Отношение $\frac{p_n}{q_n}$ называется n-ой подходящей дробью и является рациональной функцией от n + 1 переменной, а именно a_0, a_1, ... a_n. Обозначим:

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, ..., a_n]$$

В частности, $[a_0] = \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = a_0$. Далее, при n > 0, имеем следующее:

$$[a_0, a_1, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1}}{p'_{n-1}} = a_0 + \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, ..., a_n]}$$

Применяя повторно, получаем:

$$[a_0, a_1, ..., a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

Ну или чуть проще:

Определение

Для нескоратимой дроби $\frac{r}{s}$ (r $>$ s) сопоставим ей запись

$$\frac{r}{s} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{2n-2} + \cfrac{1}{a_{2n-1}}}}}}$$

Где a_i - натуральные числа ($a_i > 0$). Заметим, что знаменатель последней дроби можно представить как $a'_n = a_n$ - 1 $+ \frac{1}{1}$, поэтому мы всегда будем подразумевать чётное число компонент, то есть $\frac{r}{s} = [a_0, a_1, ..., a_{2n-1}]$. Такую цепную дробь будем называть *положительной цепной дробью*.

Упражнение 1: подумать, почему такое разложение (с оговорённым чётным количеством компонент) однозначно для взятых нами дробей.

Примечание

Тем не менее, можно раскладывать число в цепную дробь иным образом, используя целые части не с недостаком, а с избытком:

Цепные дроби Хирцебруха

$$\frac{r}{s} = c_0 - \cfrac{1}{c_1 - \cfrac{1}{c_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{c_{n-2} - \cfrac{1}{c_{n-1}}}}}} = [[c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}]].$$

Условимся, что $c_i > 1$.

Упражнение 2: подумать, почему такое разложение (без оговорки на четность количества компонент) однозначно для взятых нами дробей.

Чтобы не путаться, будем назвать такие цепные дроби *отрицательным цепными дробями*.

Простой пример

Example

Разложим дробь $\frac{11}{7}$:

$$\frac{11}{7} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = [1,\ 1,\ 1,\ 3]$$

$$\frac{11}{7} = 2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2}}} = [[2,\ 3,\ 2,\ 2]]$$

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{2}{1},\ p_1 = a_0 a_1 + 1 = 2,\ q_1 = a_1 = 1$$

$$\frac{p_2}{q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_1 a_2 + 1} = \frac{3}{2}$$

Семь простых алгебраических лемм

Леммы:

Лемма 1A: для n, больших 1, имеет место равенство

$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}; \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$

Докажем по индукции. При n = 2 это утверждение справедливо непосредственно из примера, а далее предположим, что оно верно для n-1. Тогда $p_{n-1'} = a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}$, $q_{n-1'} = a_n q'_{n-2} + q'_{n-3}$.

Откуда получаем: $p_n = a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1} = a_0(a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}) + a_n q'_{n-2}$ $+ q'_{n-3} = a_n(a_0 p'_{n-2} + q'_{n-2}) + a_0 p'_{n-3} + q'_{n-3} = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$.

$q_n = p'_{n-1} = a_n p'_{n-2} + p'_{n-3} = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$.

Для удобства можно положить $p{-}2 = 0$, $p_{-1} = 1$; $q_{-2} = 1$, $q_{-1} = 0$. Иными словами, мы как бы добавляем две подходящие “дроби”:

$$\frac{p_{-2}}{q_{-2}} = \frac{0}{1}, \qquad \frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{1}{0}(= \infty)$$

Семь простых алгебраических лемм

Следующие 4 леммы будут упражнениями:

Леммы

Лемма 1B: положим для целых k от 1 до n $r_k = [a_k, a_{k+1}, ..., a_n]$; тогда
$[a_0, a_1, ..., a_n] = [a_0, a_1, ..., a_{k-1}, [a_k, a_{k+1}, ..., an]] = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}}$

Лемма 1C: начиная с n = -1,
$q_n p_{n-1}$ - $p_n q_{n-1} = (-1)^n$

Лемма 1D: начиная с n = 0,
$q_n p_{n-2}$ - $p_n q_{n-2} = (-1)^n a_n$

Лемма 1E: положим $\alpha = [a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}]$. Тогда:
$q_n \alpha$ - $p_n = \frac{(-1)^n}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}$

Семь простых алгебраических лемм

Лемма 1F

Лемма 1F: начиная с n = 1,
$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n,\ a_{n-1},\ \dots,\ a_2,\ a_1]$
Доказательство: используем индукцию по n. Базой послужит $\frac{q_1}{q_0} = \frac{a_1}{1} = a_1 = [a_1]$, а шагом
$\frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}{q_{n-1}} = a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} = a_n + \frac{1}{[a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1]} =$
$= [a_n,\ a_{n-1},\ \dots,\ a_1]$

Лемма 2А

Лемма 2А: Пусть a_0, a_1, ..., a_n, ... - действительные числа, причём a_1, a_2, ..., a_n - положительные. Тогда:
$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < ...; ... < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$
Доказательство: в силу леммы 1D, $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ - $\frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1}a_n}{q_n q_{n-2}}$. При чётных n начиная с 2 $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ - $\frac{p_n}{q_n} < 0$, при нечётных n начиная с 1 $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ - $\frac{p_n}{q_n} > 0$.
Остаётся показать, что для чётного n и нечётного m справедливо $\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_m}{q_m}$. Положим, например, n < m. Тогда в силу неравенства $\frac{p_n}{q_n} \leq \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$, достаточно показать, что $\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} < \frac{p_m}{q_m}$. Но последнее равенство справедливо в силу того, что $q_m p_{m-1}$ - $p_m q_{m-1} = (-1)^m < 0$ (так как m - нечётное). Случай n > m разбирается аналогично.
Таким образом, подходящие дроби $\frac{p_i}{q_i}$ как бы "скачут" через искомое число - нечётные его больше, а чётные меньше. Заметим, что $\frac{p_{-2}}{q_{-2}} = \frac{0}{1} = 0$ и $\frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{1}{0} = \infty$ в этом смысле удовлетворяют условиям.

Немного отвлечёмся

Посмотрим на следующие 6 бесконечных строк:

… 1 1 1 1 1 1 1 1 …

… 1 4 2 1 3 2 2 1 …

… 1 3 7 1 2 5 3 1 …

… 2 5 3 1 3 7 1 2 …

… 1 3 2 2 1 4 2 1 …

… 1 1 1 1 1 1 1 1 …

Заметим, что

Наблюдения

1. Выполняется условие, которое мы назовём “Унимодулярность”:
   $$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}$$
   для любых четырёх чисел a, b, c, d в вершинах единичного ромба верно равенство $ad - bc = 1$.
2. Первая и последняя строчка состит из единиц
3. Все элементы - целые числа (что, строго говоря, не гарантируется)
4. Есть скользящая симметрия

Определение фриза

Теперь более формально определим тот объект, который мы увидели:

Формальное определение

Фризом порядка n называется таблица (t_{ij}), состоящая из n - 1 бесконечной влево и вправо строки положительных чисел, расположенных в шахматном порядке, и удовлетворяющих следующим свойствам:

1. Выполняется условие унимодулярности
2. Первая и последняя строчка состит из единиц: $t_{1j} = t_{n-1}j = 1$

Будем называть фриз *целочисленным*, если все его элементы - целые (положительные) числа. Заметим, что в некотором смысле удобно положить элементы двух дополнительных строк снизу и сверху равными нулю.

Фризы произвольных порядков

Давайте попытаемся как-то описать фризы произвольных порядков; а именно, выразим элементы последующих строчек через элементы второй строки.

Пусть дан фриз порядка n со второй строкой $\ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots$. Ясно, что каждый из элементов третьей строки выражается через два элемента второй строки; в то же время, каждый из элементов четвёртой можно выразить через три стоящих над них элемента второй; затем, элемент пятой выражается через четыре элемента второй строки, и так далее. Это соотношение можно увидеть отсюда:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & \\
a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 \\
 & v_2(a_1, a_2) & & v_2(a_2, a_3) & & v_2(a_3, a_4) & \\
 & & v_3(a_1, a_2, a_3) & & v_3(a_2, a_3, a_4) & & \\
 & & & v_4(a_1, a_2, a_3, a_4) & & &
\end{array}
$$

Несложно найти $v_2(a_1, a_2) = a_1 a_2$ - 1; аналогично для v_2 от остальных членов. Чуть сложнее вычислить $v_3(a_1, a_2, a_3) = (v_2(a_1, a_2) v_2(a_2, a_3)$ - $1)/a_2 = ((a_1 a_2$ - $1)(a_2 a_3$ - $1)$ - $1)/a_2 = a_1 a_2 a_3$ - a_3 - a_1.
Становится труднее найти $v_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1 a_2 a_3 a_4$ - $a_1 a_2$ - $a_1 a_4$ - $a_3 a_4 + 1$, и элементы шестой строки:
$v_5(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ - $a_1 a_2 a_3$ - $a_1 a_2 a_5$ - $a_1 a_4 a_5$ - $a_3 a_4 a_5 + a_1 + a_3 + a_5$.
Упражнение: проделайте самостоятельно вывод через унимодулярность элементов пятой и шестой строки.

Попробуем найти закономерность, которой подчиняются эти вычисления.

Континуанты: введение

Детерминант

Назовём континуантой

$$V_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

Соотношение унимодулярности получим с помощью **тождества Льюиса Кэрролла**. Пусть A $= (a_{ij})$ - произвольная матрица порядка n, M - её определитель; обозначим через $M_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ её минор порядка n-k, полученный вычёркиванием из A строк с номерами i_1, ..., i_k и столбцов с номерами j_1, ..., j_k. Тогда имеет место равенство:

$$M \times M_{1,n}^{1,n} = M_1^1 \times M_n^n - M_n^1 \times M_1^n$$

Вычисление континуанты

...Вычисление...

Вычислим континуанты с помощью приведённого тождества. Замечательность этого тождества заключается в том, что миноры из него в нашем случае будут либо континуантами меньшего порядка, либо единицами. А именно,

$$\begin{cases} M_1^1 = V_{n-1}(a_2, a_3, ..., a_n) \\ M_n^n = V_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \\ M_{1,n}^{1,n} = V_{n-2}(a_2, a_3, ..., a_{n-1}) \end{cases}$$

ну и M_1^n с M_n^1 - это просто 1.

Вычисление континуанты

...Вычисление...

Поэтому тождество для контиуант принимает вид:

$$\begin{cases} V_n(a_1, a_2, ..., a_n) \times V_{n-2}(a_2, ..., a_{n-1}) = \\ = V_{n-1}(a_2, a_3, ..., a_n) \times V_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) - 1 \end{cases}$$

Что и требовалось получить. Записать данное условие можно так:

$$1 = \begin{vmatrix} V_{n-1}(a_1, ..., a_{n-1}) & V_{n-2}(a_2, ..., a_{n-1}) \\ V_n(a_1, ..., a_n) & V_{n-1}(a_2, ..., a_n) \end{vmatrix}$$

Занимательные теоремы

Теоремы

Теорема 1: элемент (n + 1)-й строки фриза, над которым во второй строке стоят числа a_1, ..., a_n, равняется континуанте $V_n(a_1, ..., a_n)$.
Доказательство этой теоремы можно получить по индукции из предыдущего результата.

Важное следствие: из этой теоремы мы сразу же понимаем, каким образом и почему во фризах с целочисленной второй строкой получается целочисленными остальные строки. Иными словами, фриз, элементы второй строки которого являются целыми положительными числами, является целочисленным.

Теоремы

Заметим, что имеющиеся соотношения позволяют восстановить вторую строчку - а следовательно, и весь фриз - по диагонале. Сформулируем это в теорему.

Теорема 2: пусть a_1, a_2, a_3, ... - вторая строка фриза; а $v_1 = a_1$, v_2, v_3 - его диагональ. Тогда имеют место равенства:

$$a_k = \frac{v_{k-2} + v_k}{v_{k-1}}$$

Это также можно сформулировать как следующее следствие.

Следствие 2: последовательность v_k явлется решением разностого уравнения

$$V_k = a_k V_{k-1} - V_{k-2}$$

где a_1, a_2, ... - коэффициенты, V_1, V_2, ... - неизвестные.

Объяснение скользящей симметрии фризов

Периодичность

Рассмотрим фриз порядка n: он состоит из n - 1 строки, последняя его строка из 1, а следующая за ней принимается нами как строка из нулей. Таким образом, для его диагонали 1, v_1, ..., v_{n-1} выполняются равенства

$$v_{n-2} = 1; \qquad v_{n-1} = 0$$

Тогда из последнего рекуррентного соотношения получаем

$$v_{n-3} = a_{n-1}$$

Таким образом получаем, что предпоследний ненулевой элемент диагонали V_{n-3} равняется элементу a_{n-1} второй строки. Аналогично, следующий за ним в строке элемент равняется a_n. Получается, что предпоследняя ненулевая строка фриза совпадает со второй, сдвинутой на n/2 позиций.

Объяснение скользящей симметрии фризов

Периодичность

Из последнего соотношения и условия унимодулярности получается, что фриз можно строить не от второй строки - вниз, а от предпоследней - вверх, и результат будет тем же.
Следствие 3: фриз порядка n обладает скользящей симметрий: его k-ая строка, сдвинутая на n/2 позиций, совпадает с (n - k)-й строкой.
Следствие 4: фриз порядка n является периодичным с периодом n. (как композиция двух скользящих симметрий).

Целочисленные фризы

Определение: назовём *сущностью* целочисленного фриза его вторую строчку (a_1, ..., a_n). Она, очевидно не содержит двух единиц подряд (что противоречило бы условию унимодулярности). Однако, оказывается, что сущность обязана содержать хотя бы одну единицу. (Напомним, что под целочисленным фризом мы подразумеваем фриз с положительными элементами, то есть из натуральных чисел).

Лемма 3А: сущность целочисленного фриза содержит хотя бы одну единицу.

Доказательство: предположим противное; тогда все элементы второй строки не меньше 2. Следовательно, на его первой диагонали $v_k = a_k v_{k-1} + v_{k-2}$, что не меньше чем $2v_{k-1} + v_{k-2}$

Откуда v_k - $v_{k-1} \geqslant v_{k-1}$ - v_{k-2}

Таком образом, v_k - $v_{k-1} \geqslant v_{k-1}$ - $v_{k-2} \geqslant ... \geqslant v_2$ - $v_1 = a_2$ - $1 \geqslant 1$, следовательно последовательность элементов диагонали строго возростающая - и не примет никогда значение 1 - противоречие.

Построим фриз

Построим фриз

Давайте попробуем по целочисленному фриз порядка n построить целочисленный фриз порядка n+1. Следующая лемма нам в этом поможем.

Лемма 3B: пусть $(a_1, a_2, ..., a_n)$ - сущность целочисленного фриза порядка n, и дано число k: $1 \leq k \leq n$. Тогда:

1. Набор $(a_1, ..., a_{k-1} + 1, 1, a_k + 1, a_{k+1}, ..., a_n)$ является сущностью целочисленного фриза порядка $n + 1$;
2. Если $1, v_1, ..., v_{n-1}$ - первая диагональ исходного фриза, и $v_1 = a_1$, то соответствующая диагональ нового фриза имеет вид:

$$1, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k-1} + v_k, v_k, \ldots, v_{n-2}$$

Доказательство леммы 3В

Доказательство

Начнём с пункта (2). Обозначив первую диагональ нового фриза как 1, w_1, ..., w_{n-1}, посмотрим, как она устроена. Ясно, что при i $\leq$ k - 2 выполняется $w_i = v_i$; тогда на (k - 1)-ом месте в диагонале нового фриза будет стоять

$$w_{k-1} = (a_{k-1} + 1)v_{k-2} - v_{k-3} = v_{k-1} + v_{k-2}$$

Далее,

$$w_k = w_{k-1} - w_{k-2} = (v_{k-1} + v_{k-2}) - v_{k-2} = v_{k-1}$$

Аналогичными рассуждениями мы получаем, что при всех j $\geqslant$ k + 1 выполняется равенство $w_j = v_{j-1}$, то есть элементы диагонали как бы "сдвигаются" на 1. Тогда (n-1)-ый и (n-2)-ой элементы новой диагонали будут соответственно 0 и 1, то есть фриз оборвётся и будет содержать n положительных элементов. То же самое рассуждение применимо и к любой другой диагонали. Стало быть, в результате такой вставки получится целочисленный фриз на единицу болешего порядка. Теперь и пункт (1) доказан.

Дополнение и введение в триангуляции

Дополнение

Заметим, что в силу леммы 3А это верно и в обратную сторону - если (..., b_{k-1}, 1, b_{k+1}, ...) - сущность целочисленного фриза, то и (..., b_{k-1} - 1, b_{k+1} - 1, ...) - сущность целочисленного фриза на единицу меньшего порядка (так как двух единиц подряд быть не может, и одна единица всегда гарантированно есть).

Триангуляции

Наверное, всем вам знакомо понятие *триангуляции* - разбиение выпуклого многоугольника с n вершинами на треугольники, которые пересекаются только по вершинам исходного многоугольника. Таких треугольников будет n - 2, а количество способов так разбить многоугольник связано с очень известными *числами Каталана*.

Итак, если упорядочить набор вершин и сопоставить триангуляции набор чисел (c_1, c_2, ..., c_n), где c_i - количество треугольников, сходящихся в i-ой вершине, то по такой вот *сущности триангуляции* можно однозначно её восстановить.

Упражнение: докажите это утверждение.

Целочисленные фризы и триангуляции

Биекция фризов и триангуляций

Теорема 3: набор чисел $(c_1, \ldots, c_n)$, являющийся сущностью триангуляции, является также сущностью целочисленного фриза, причём такое сопоставление является биекцией.

Доказательство: Будем доказывать эту теорему по индукции по n. База $n = 3$ очевидна: имеется лишь одна триангуляция треугольника и единственный фриз 3-го порядка с сущностью $(1, 1, 1)$.

Рассмотрим некоторую триангуляцию n-угольника, и выберем одно "ухо" (вершин, в которых примыкает всего один треугольник - по принципу Дирихле их не менее двух), пусть эта вершина имеет номер k, а в вершинах k - 1 и $k + 1$ прилегают b_{k-1} и b_{k+1} треугольников соответственно. Сущность триангуляции в таком случае можно записать, как $(\ldots, b_{k-1}, 1, b_{k+1}, \ldots)$. Выбросим треугольник, прилегающий к k-ой вершине, и получим триангуляцию (n - 1)-угольника, которая будет выглядить, как $(\ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots)$. По предположению индукции это сущность целочисленного фриза, но по лемме 3B - исходная триангуляция тоже сущность целочисленного фриза.

Биективность следует из дополнения к лемме 3B - по целочисленному фризу порядка n можно получить триангуляцию и сущность целочисленного фриза порядка n - 1, удалив 1.

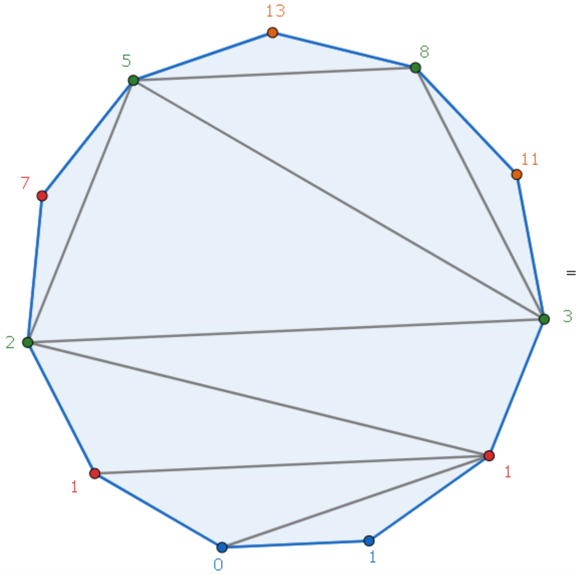
И ещё немного о триангуляциях

Давайте посмотрим, как ещё можно посмотреть на сопоставленную фризу триангуляцию: можно получить элементы диагонали, если расставлять числа в вершинах следующих образом.

- Поставим в первую и вторую вершину значения 0 и 1
- Далее, если три вершины в треугольнике, то если мы знаем значения a и b в двух из них, то в третью ставим значение a + b

Полученные таким образом числа в i-ой вершине будут равны (i - 2)-ому элементу диагонали, то есть v_{i-2}.
Доказывать это утверждение мы не будем, но будет следующее упражнение:
Упражнение: рассмотрим триангуляцию n-угольника, диагонали в котором образуют зигзаг - докажите, что элементы соответствующего этой триангуляции фриза будут числами Фибоначчи.

Немного примеров



$= (2, 1, 4, 4, 1, 3, 1, 4, 1, 4, 2)$

Немного примеров

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
2 1 4 4 1 3 1 4 1 4 2
1 3 15 3 2 2 3 3 3 7
2 11 11 5 1 5 2 8 5
7 8 18 2 2 3 5 13
5 13 7 3 1 7 8
8 5 10 1 2 11
3 7 3 1 3
4 2 2 1
1 1 1

А в чём смысл?

Да, мы поговорили о фризах и о триангуляциях, ввели континуанты. Но какое это отношение имеет к цепным дробям?

Связь отрицательных цепных дробей и континуант

Лемма 4А: напомним, что для нескоратимой дроби $\frac{r}{s} > 1$ можно положить отрицательную цепную дробь как

$$\frac{r}{s} = c_1 - \cfrac{1}{c_2 - \cfrac{1}{c_3 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{c_{n-1} - \cfrac{1}{c_n}}}}} = [[c_1, c_2, \ldots, c_n]]$$

Тогда i-ая подходящая отрицательная дробь равняется:

$$[[c_1, c_2, \ldots, c_i]] = \frac{V_i(c_1, \ldots, c_i)}{V_{i-1}(c_2, c_3, \ldots, c_i)}$$

Упражнение: докажите последнюю формулу.

Отрицательные цепные дроби и триангуляции

Давайте научимся сопоставлять дроби из $\mathbb{Q}_{\geqslant 1} \bigcup \{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\}$ конкретную триангуляцию с двумя "ушами" - треугольниками в триангуляции, у которых две из трёх сторон совпадают со сторонами исходного многоугольника.

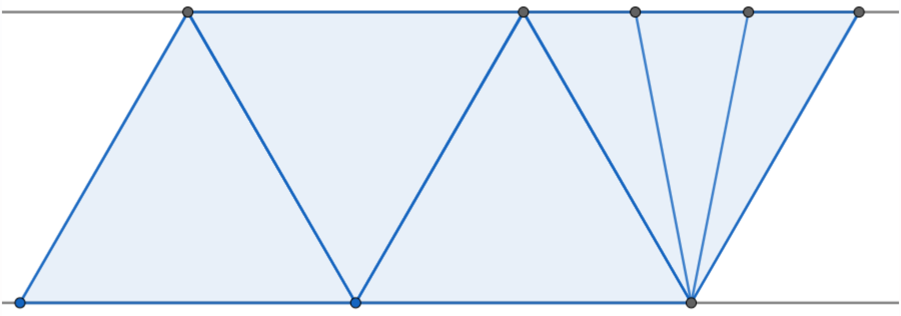
Для простоты и комбинаторной эквивалентности будем рисовать вершины на двух параллельных прямых; у всех треугольников основание будет на одной из прямых, а вершина - на другой. Таким образом, можно разделить на две группы - те, которые смотрят "снизу вверх" или "сверху вниз".

Рассмотрим триангуляции многоугольника, у которого самая левая вершина на нижней прямой и самая правая вершина на верхней прямой является "ушами", а в вершинах на верхней прямой сходятся $c_1, c_2, \ldots, c_k, 1$ треугольников.

Упражнение: найтиде, как по c_1, ..., c_k найти число треугольников в триангуляции.

(Не)занимательный пример

Посмотрим на триангуляцию $\frac{11}{7} = [[2, 3, 2, 2]]$:



Суммы Фарея

Такая триангуляция позволяет с лёгкостью вычислить соответствующую ей дробь: в первые две вершины мы ставим дроби $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{0}$, а далее аналогично сопоставлению триангуляции первой диагонали фриза последовательно в каждом из треугольников с дробями $\frac{p}{q}$ и $\frac{p'}{q'}$ спопоставляем дробь, равную сумме Фарея от этих двух. А именно, мы сопоставляем дробь по следующему правилу.

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}$$

Таким образом, расставляя так дроби, мы можем получить итоговое число в последней вершине. Об этом расскажет следующая теорема.

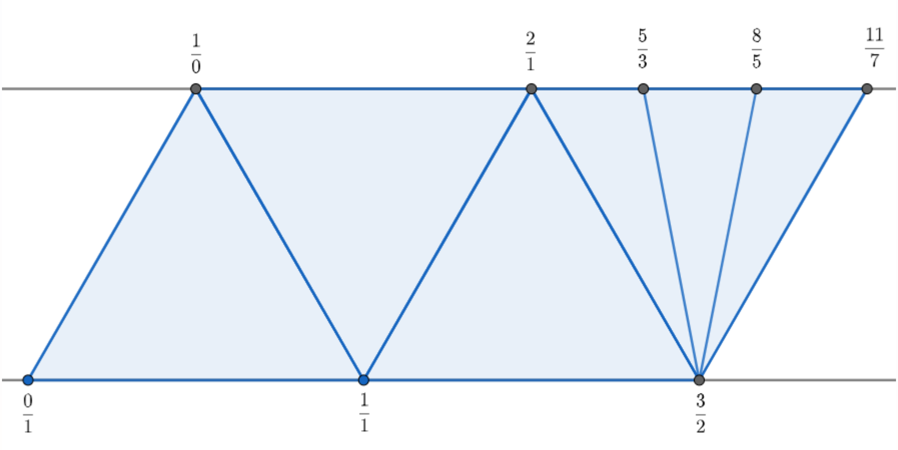
Важная теорема

Связь триангуляций и цепных дробей: начало

Теорема 4: рассмотрим триангуляцию с двумя “ушами”, в верхней строке которой сходятся $c_1, c_2, \ldots, c_k, c_{k+1} = 1$ треугольников. Разместим в левой верхней и левой нижней вершинах триангуляции числа $0/1$ и $1/0$ соответственно. Далее будем поочередно писать в вершинах триангуляции дроби по следующему правилу: для треугольника, в котором уже заполнены две вершины, в третьей вершине разместим сумму Фарея чисел, стоящих в этих двух вершинах. Тогда в последней вершине (отвечающей второму “уху” триангуляции) будет дробь, равная $[[c_1, \ldots, c_k]]$.

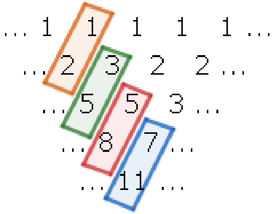
Иллюстрация

Посмотрим на тот пример, который мы делали для $\frac{11}{7}$:



Иллюстрация

Нарисуем теперь фриз, соответствующий триангуляции $\frac{11}{7}$; заметим, что можно увидеть ещё одну занимательную особенность:

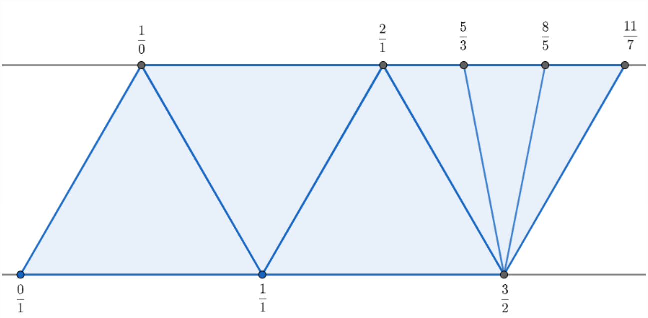


Доказательство

Начнём с рассмотрения фриза, соответствующего сущности этой триангуляции - то есть фриза, сущность которого содержит фрагмент $(c_1, ..., c_k, 1)$. Числители и знаменатели дробей, которые складываются по Фарею при выполнении описанного в теореме алгоритма, будут образовывать две идущие подряд диагонали этого фриза, которые начинаются от c_1 и c_2 соответственно.
Действительно, и числители, и знаменатели вычисляются в точности по правилу, описанному после теоремы 3 — только в первом случае мы начинаем с пары (0, 1), написанной на самой левой стороне, а во втором — с пары (1, 0).
Но, как мы знаем, элементы фриза являются континуантами от элементов второй строки. Стало быть, i-й элемент первой диагонали при любом $i \leq k$ будет равен $V(c_1, \ldots, c_i)$, а (i 1)-й элемент второй диагонали окажется равным $V(c_2, \ldots, c_i)$. А согласно лемме 4A, их отношение в точности равно i-й подходящей дроби $[[c_1, \ldots, c_i]]$.
Положив $i = k$, получаем требуемое утверждение.

Связь положительных цепных дробей и триангуляций

Оказывается, что по приведённой нами триангуляции с двумя “ушами” однозначно восстанавливаются как отрицательные подходящие цепные дроби, так и положительные. Действительно, можно обратить внимание на то, когда треугольники меняют своё направление. Пусть наша триангуляция состоит из a_1 треугольников, направленных вверх, a_2 треугольников, смотрящих вниз, после a_3 треугольников, смотрящих вверх, и т.д. Это другой способ задания триангуляции, альтернативный заданию сущностей вершин на верхней прямой. Например, в данном примере это $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$ и $\frac{11}{7} = [1, 1, 1, 3]$.



Довольно важная теорема

Связь между положительными и отрицательными цепными дробями

Теорема 5: пусть у нас есть два разложения числа $\frac{r}{s} = [a_1, \ldots, a_{2m}] = [[c_1, \ldots, c_n]]$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n) = (a_1 + 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{a_2 - 1}, a_3 + 2, \underbrace{2, \ldots, 2}_{a_4 - 1}, \ldots, a_{2m-1} + 2, \underbrace{2, \ldots, 2}_{a_{2m} - 1})$$

где единицы и двойки чередуются.

Доказывать мы эту теорему пока не будем, но интересно подумать, почему это правда так.

... И возвращаясь в алгебру

Что открыл Фарей

Определение: *рядом Фарея* порядка n (n $\geqslant$ 1) называется последовательность нескоратимых рациональных дробей, лежащих между 0 и 1, со знаменателями, не превосходящими n, упорядоченных по возростанию. Обозначается такой ряд как $\mathbb{F}_n$. Например,

$$\mathbb{F}_5 = 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1$$

Лемма

Лемма 5А: если $\frac{h}{k}$, $\frac{h'}{k'}$ - последовательные члены ряда Фарея, то

$$h'k - hk' = 1$$

Для доказательства

Для доказательства нам потребуется следующее предложение:

Предложение

Предложение 5: пусть x $= (x_1, x_2)$ и y $= (y_1, y_2)$ - целые точки на плоскости, причём $\mathbf{0} = (0, 0)$, x, и y не лежат на одной прямой, и замкнутый треугольник 0, x, y не содержит других целых точек внутри или на своей границе. Тогда

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \pm 1$$

Доказательство: обозначим исходный треугольник через $\mathbb{G}$, а параллелгорамм из удовенного $\mathbb{G}$ (то есть с вершинами 0, x, y, x + y) за $\mathbb{P}$. Очевидно, что $\mathbb{P}$, как и $\mathbb{G}$, не будет содержать других целых точек, кроме вершин.
Далее, если p - произвольная целая точка, то p можно представить как линейную комбинацию x и y, то есть $p = \lambda x + \mu y$ (коэффициенты действительные).

Для доказательства

Продолжение

Представим p $= p' + p''$, где $p' = [\lambda]x + [\mu]y$, $p'' = \{\lambda\}x + \{[\mu\}y$. Точки p и p' целые, а значит и точка p'' - тоже. С другой стороны, p'' лежит в $\mathbb{P}$ (если кто не знает, подумайте почему, это хорошее **упражнение**), но это не x, не y и не x $+$ y - а значит только 0, и следовательно p'' $=$ 0. Поэтому точку p можно предстваить как $\lambda x + \mu y$ с целыми коэффициентами. В частности,

$$\begin{cases} (1,0) = \lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2) \\ (0,1) = \lambda' x + \mu' y = (\lambda' x_1 + \mu' y_1, \lambda' x_2 + \mu' y_2) \end{cases}$$

И тогда можно заметить, что

$$1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \mathrm{x}_1 & \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{x}_2 & \mathrm{y}_2 \end{vmatrix}$$

Откуда и следует, что $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \pm\, 1$, так как числа λ, μ, λ', μ' - целые.

Доказательство

Вернёмся к доказательству $h'k$ - $hk' = 1$

Положим **x** = (h, k) и **y** = (h', k'). Эти две точки и 0 не лежат на одной прямой, и, кроме того, не содержит других целых точек (проделайте это как **упражнение**).
Но в силу предложения 5, тогда $h'k$ - $hk' = \pm 1$. Однако мы знаем, что это последовательные члены ряда Фарея, и следовательно $h'k$ - $hk' = 1$.

Занимательное следствие

Следствие: если $\frac{h}{k}$, $\frac{h''}{k''}$ и $\frac{h'}{k'}$ - последовательные члены ряда Фарея, то

$$\frac{h''}{k''} = \frac{h + h'}{k + k'}$$

Доказательство: по доказанной лемме 5A, $h''k$ - $hk'' = 1$ и $h'k''$ - $h''k' = 1$, откуда получаем, что $h''(k + k')$ - $k''(h + h') = 0$

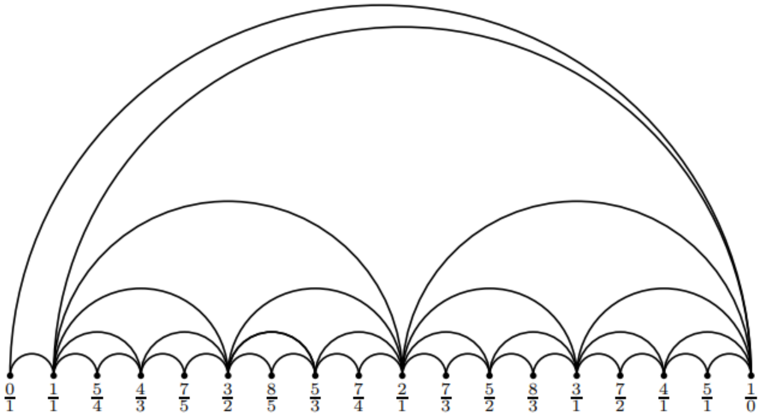
Граф Фарея

Ну и наконец

Определение: *граф Фарея* - это бесконечный граф, вершинами которого являются элементы $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \bigcup \{\infty\}$, а соседние вершины $\frac{r}{s}$ и $\frac{p}{q}$ соеденены ребром тогда и только тогда, когда ps - qr $= \pm 1$.
Замечание: стоит обратить внимание, что всякий "треугольник" в графе Фарея по доказанному нами имеет вид p/q, r/s, (p + r)/(q + s). Почему это следует из того, что мы доказали - подумайте сами (**упражнение**).

Граф Фарея удобно рисовать на гиперболической плоскости. Мы будем использовать для этого модель в верхней полуплоскости; вкратце напомним основные понятия, связанные с ней.
Пусть $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ — множество комплексных чисел с положительной мнимой частью. Будем называть его "гиперболической плоскостью".
Вещественную прямую, пополненную точкой ∞, будем называть абсолютом: ее можно воспринимать как множество "бесконечно удаленных точек" гиперболической плоскости. Прямыми на $\mathbb{H}$ будем называть полуокружности с центром на абсолюте (т.е. перпендикулярные вещественной прямой) и вертикальные полупрямые с началом на абсолюте.
Поместим вершины графа Фарея на абсолют и изобразим каждое ребро прямой (именно прямой, а не отрезком!) на $\mathbb{H}$.

Иллюстрация фрагмента графа Фарея



Красивый рисуночек

Триангуляцию многоугольника, сопоставляющуюся цепной дроби, удобно рассматривать как подграф соответствующего графа Фарея. Вот, например, такая картинка для дроби $\frac{7}{5}$: