# Тропическая геометрия

**АННОТАЦИЯ**

В данной работе будут рассмотрены тропические многочлены, соответствующие им тропические кривые, а также диаграммы Ньютона.

# 1. Введение

## 1.1 Совсем немного слов о тропической математике

Тропическая математика представляет собой область математики, объектом исследования которой является множество вещественных чисел, дополненное элементом $x$, который выполняет функцию 'минус бесконечности', с введёнными на этом множестве операциями тропического сложения и тропического умножения. Различают тропическую алгебру и тропическую геометрию. Алгебра изучает тропическое полукольцо, а геометрия - гладкие комплексные кривые на плоскости.

## 1.2 Основные понятия

**Тропическое сложение** и **тропическое умножение**

$$a \oplus b = \max(a, b),\ \ a \odot b = a + b$$

**Тропический многочлен степени** $d$

$$f(x, y) = \bigoplus_{i+j \leq d} \alpha_{i,j} x^i y^j = \max_{i+j \leq d}(ix + jy + a_{i,j})$$

В данной записи $x^i$ понимается именно как тропическое умножение $x$ на себя $i$ раз.
Также отметим, что мы рассматриваем тропический многочлен не как набор коэффициентов $\alpha_{i,j}$, а как кусочно-линейную функцию. Например, может оказаться, что для какого-то из мономов $\alpha_{i,j} x^i y^j$ значение многочлена не совпадает со значением монома ни в одной точке, тогда малое изменение коэффициента $\alpha_{i,j}$ не изменяет многочлен. Ещё одно важное замечание состоит в том, что тропический многочлен степени $d$ не является частным случаем многочлена степени $d' > d$.
**Тропическая кривая**, соответствующая данному тропическому многочлену $f$ степени $d$ - граф на тропической плоскости, являющийся множеством негладкости этого многочлена, рёбра которого снабжены кратностями. Рассмотрим какое-то ребро. Пусть в одной из областей, граничащих с ним, максимальной является ветвь $i_1 x + j_1 y + \alpha_{i_1,j_1}$, а в другой области $i_2 x + j_2 y + \alpha_{i_2,j_2}$. Тогда прямая, содержащая данный отрезок, задаётся уравнением

$$(i_1 - i_2)x + (j_1 - j_2)y + (\alpha_{i_1,j_1} - \alpha_{i_2,j_2}) = 0$$

Тогда кратностью этого ребра будем считать $gcd(i_1 - i_2, j_1 - j_2)$.
Частным случаем тропической кривой является **тропическая прямая**, которая соответствует тропическому многочлену степени 1.

# 2. Тропическая геометрия

## 2.1 Тропическая прямая

Тропическая прямая является простейшим объектом изучения тропической геометрии. Она представляет собой объединение 3 лучей, выходящих из одной точки: один из лучей направлен строго влево, другой строго вниз, а третий вправо вверх под углом 45°. Любые две тропические прямые получаются друг из друга параллельным переносом. Множество всех тропических прямых образует пространство $\mathbb{R}^2$. Тропическая прямая обладает следующими свойствами:

1. Любые две тропические прямые общего положения пересекаются в единственной точке
2. Через любые две точки общего положения проходит единственная тропическая прямая

Тропическая прямая является бесконечным вырождением комплексной прямой, так что эти свойства являются следствиями аналогичных свойств прямых в классической геометрии. Рассмотрим комплексную плоскость $\mathbb{C}^2$ с комплексными координатами $X, Y$, а также пару точек $P_1$ и $P_2$ общего положения с координатами $(X_1, Y_1)$ и $(X_2, Y_2)$ соответственно. Пусть $L$ - прямая, проходящая через эти две точки, тогда уравнение прямой $AX + BY + C = 0$ принимает вид:

$$\frac{1}{X_2 - X_1}X - \frac{1}{Y_2 - Y_1}Y + \frac{Y_1}{Y_2 - Y_1} - \frac{X_1}{X_2 - X_1} = 0$$

Любое комплексное число $X$ можно представить в виде $X = \varphi r$, где $\varphi$ - комплексное число единичной длинны, а $r$ - модуль $X$. Положим, $r = t^x$, где $t > 1$ - какое-то фиксированное число. Тогда

$$P_i = (\varphi_i t^{x_i}, \psi_i t^{y_i}),\ |\varphi| = |\psi| = 1,\ (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2,\ i = 1, 2$$

Зафиксируем $\varphi_i, \psi_i, x_i, y_i$, а величину $t$ будем менять. Получим семейство прямых $L(t)$. Рассмотрим поведение этих прямых при $t \to \infty$. Рассмотрим поведение коэффициента $A(t)$ уравнения прямой. При $x_2 > x_1$ имеем

$$A(t) = \frac{1}{X_2 - X_1} = \frac{1}{\varphi_2 t^{x_2} - \varphi_1 t^{x_1}} = \frac{t^{-x_2}}{\varphi_2 - \varphi_1 t^{x_1 - x_2}} \sim \frac{1}{\varphi_2} t^{-x_2},$$

так как $t^{(x_1 - x_2)} \to 0$. Поэтому коэффициент $A(t)$ ведёт себя как функция вида $c \cdot t^{\alpha}$, где $\alpha = -x_2$. В случае $x_2 < x_1$ получаем аналогичное уравнение с $\alpha = -x_1$.
Аналогично получаем $B \sim c \cdot t^{\beta},\ C \sim c \cdot t^{\gamma}$. Таким образом, уравнение прямой принимает вид

$$at^{x+\alpha} + bt^{y+\beta} + ct^{\gamma} = 0,$$

где комплексные числа $a, b, c$ являются ограниченными константами, не зависящими от $t$. Если показатели $x + \alpha, y + \beta, \gamma$ попарно различны, то один из трёх мономов будет существенно преобладать над другими, и выражении не будет обращаться в 0. Следовательно, получаем следующее утверждение.

**Предложение 1.** *Для того, чтобы точка $(\varphi t^x, \psi t^y)$ являлась решением уравнения $AX + BY + C = 0$, необходимо, чтобы максимум из чисел $x + \alpha, y + \beta, \gamma$ достигался хотя бы в 2 из них. Множество пар чисел $(x, y)$, для которых выполняется это условие, является тропической прямой, а именно, множеством негладкости кусочно-линейной функции*

$$f(x, y) = \max(x + \alpha, y + \beta, \gamma)$$

## 2.2 Тропические кривые и тропические многочлены

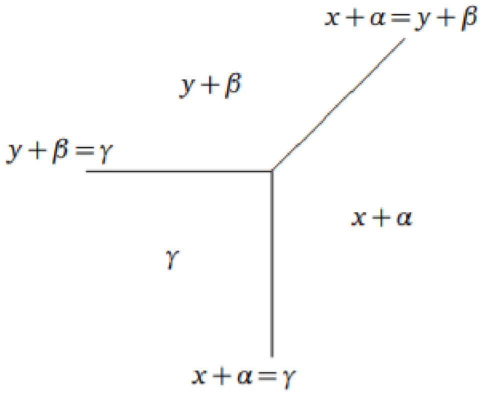
Как уже было определено выше,

$$f(x,y) = \bigoplus_{i+j\leq d} \alpha_{i,j} x^i y^j = \max_{i+j\leq d}(ix + jy + a_{i,j})$$

Рассмотрим поведение тропического многочлена на примере многочлена первой степени.

$$f(x,y) = \alpha x \oplus \beta y \oplus \gamma = \max(x+\alpha, y+\beta, \gamma)$$

В зависимости от того, какой части плоскости, разделяемой прямыми $y+\beta=\gamma$, $x+\alpha=\gamma$, $x+\alpha=y+\beta$, принадлежит точка $(x,y)$, функция в этой точке будет принимать следующие значения:




Таким образом, множеством негладкости линейной тропической функции служит тропическая прямая, расмотренная ранее.
Заметим, что Предложение 1 можно обобщить для многочленов любой степени.

**Предложение 2.** *Для того, чтобы точка $(x,y)$ лежала на тропической кривой, соответствующей заданному многочлену, необходимо, чтобы значение многочлена в этой точке достигалось хотя бы в 2 из его мономов.*

Докажем следующую лемму.

**Лемма 1.** *Тропические кривые, ассоциированные с многочленами степени $d$, обладают следующими свойствами:*

1. *Наклон каждого ребра рационален.*
2. *Для любой вершины верно следующее условие сбалансированности. Обозначим через $\nu_i$ вектор с началом в данной вершине, имеющий направление $i$-го ребра, выходящего из вершины и равный кратчайшему целочисленному вектору с данным направлением, умноженному на кратность ребра. Тогда*

$$\sum \nu_i = 0$$

3. *Имеется ровно $3d$ бесконечных рёбер, взятных с учётом кратностей, $d$ из которых направлены строго влево, $d$ направлены строго вниз и $d$ направлены вправо вверх под углом $45^\circ$.*

*Доказательство.* Первое свойство очевидно, так как каждая прямая задаётся уравнением

$$i_1 x + j_1 y + \alpha_1 = i_2 x + j_2 y + \alpha_2,$$

где $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$. Докажем второе свойство. Рассмотрим какую-то вершину и предположим, что к ней походит $r$ областей дополнения кривой, в которых максимум достигается в функциях $i_1 x + j_1 y + \alpha_1,\ i_2 x + j_2 x + \alpha_2,\ \dots,\ i_r x + j_r x + \alpha_r$. Будем считать, что области занумерованы против часовой стрелки. Тогда выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} i_2 - i_1 \\ j_2 - j_1 \end{pmatrix} + \ \dots\ + \begin{pmatrix} i_r - i_{r-1} \\ j_r - j_{r-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1 - i_r \\ j_1 - j_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

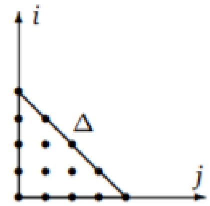
Заметим, что вектор $\begin{pmatrix} i_{s+1} - i_s \\ j_{s+1} - j_s \end{pmatrix}$ отличается от вектора $\nu_s$ только поворотом на 90°, а значит, утверждение верно.
Теперь докажем третье свойство. Многочлен степени $d$ в некотором смысле является объединением $d$ тропических прямых. Отсюда понятно, что свойство 3 верно. $\square$

**Теорема 1.** *Тропический многочлен восстанавливается по своей кривой однозначно с точностью до аддитивной(то есть тропически мультипликативной) константы. Более того, всякий граф на плоскости с прямыми рёбрами и заданными кратностями, удовлетворяющий свойствам 1-3 леммы 1, является тропической кривой, ассоциированной с некоторым многочленом степени $d$.*

*Доказательство.* Пусть в какой-то области значение многочлена совпадает с функцией $ix + jy + \alpha_1$, и один из отрезков границы этой области содержится в прямой $px + qy + \beta = 0$, тогда в другой области, содержащей этот отрезок границы, значения многочлена будут совпадать со значениями функции $(i + p)x + (j + q)y + (\alpha_1 + \beta)$. Продолжая таким же образом, получаем значения многочлена в каждой из областей. Из условия сбалансированости следует, что мы не получим противоречие. Свойство 3 леммы 1 гарантирует, что мы не можем получить многочлен другой степени. $\square$

### 2.3 Диаграмма Ньютона

Моном $\alpha_{i,j} x^i y^j$ многочлена степени $d$ сопоставим точке на плоскости с координатами $i, j$. Все полученные точки будут лежать внутри тругольника с вершинами $(0,0),\ (d,0),\ (0,d)$. Этот треугольник $\Delta$ называется диаграммой Ньютона.




Область плоскости, в которой многочлен совпадает с мономом $\alpha_{i,j} x^i y^j$, сопоставим с точкой $(i, j)$. Ребро тропической кривой, разделяющее две плоскости, в диаграмме сопоставим ребру между соответствующими вершинами. Тогда для каждой вершины тропической кривой, из который выходит $r$ рёбер, будет сопоставляться $r$-угольник, построенный на вершинах, соответствующих областям, которые подходят к этой вершине. Заметим, точкам на границе будут сопоставляться бесконечные области, а рёбрам на границе - бесконечные рёбра кривой.

**Предложение 3.** *Направление всякого ребра тропической кривой ортогонально направлению соответствующего ребра разбиения $\Delta$.*

Заметим, что две тропические кривые одинаковой формы (т.е. у них совпадают комбинаторный тип графа, направления и кратности рёбер) задают одинаковую диаграмму Ньютона, а кривые разной формы - разные. Иными словами, по диаграмме Ньютона можно восстановить тропическую кривую с точностью до длины рёбер.

**Предложение 4.** *Кратность ребра тропичесой прямой равна количеству отрезков, на которые целые точки делят соответствующее ребро диаграммы Ньютона.*