Теория Эрхарта

Золин Никита

18 ноября 2020

Содержание

Вступление

В данной теме будем рассматривать многоугольники и многогранники с вершинами в целых точках. Известна формула для площади фигуры на плоскости:

$$S = I + \frac{B}{2} - 1,$$

где I - количество точек внутри многоугольника (inner), B - количество точек на границе многоугольника (bound). Можно ли её обобщить на трёхмерное пространство?

Плоскость

Рассмотрим следующие преобразования:

$$(x; y) \longrightarrow (x+1; y)$$

$$(x; y) \longrightarrow (-x; y)$$

$$(x; y) \longrightarrow (y; x)$$

$$(x; y) \longrightarrow (x+y; y)$$

Будем рассматривать аддитивные и инвариантные (относительно данных преобразований) функции, определённые на многоугольниках с вершинами в целых точках, отрезках с концами в целых точках и целых точках.

Аддитивность:

$$f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) + f(M_2) - f(M_1 \cap M_2)$$

Плоскость

Возьмём три фигуры:
точка (0; 0);
отрезок с вершинами (0; 0) и (1; 0);
треугольник с вершинами (0; 0), (1; 0), (0; 1).
Пусть N - количество точек на границе и внутри фигуры, B - количество точек на границе фигуры, S - её площадь, N_k - количество точек внутри фигуры, полученной при гомотетии с коэффициентом k.
Обозначим за e_1, e_2 и e_3 некоторый базис. Также заметим, что с помощью преобразований, описанных выше, можно свести любую фигуру к объединению данных. Теперь заполним следующую таблицу:

	1	N	S	N_2	N_3	N_k	B	e_1	e_2	e_3
Точка	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
Отрезок	1	2	0	3	4	$k+1$	2	0	1	0
Треугольник	1	3	$\frac{1}{2}$	6	10	$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$	3	0	0	1

Плоскость

Свяжем базис с величинами 1, N, S:

$$e_1 = 2S - N + 2$$
$$e_2 = N - 4S - 1$$
$$e_3 = 2S$$

Тогда

$$N_2 = e_1 + 3e_2 + 6e_3 = 2S - N + 2 + 3N - 12S - 3 + 12S = 2S + 2N - 1$$
$$S = \frac{N_2}{2} - N + 1$$

Таким же способом можно получать другие формулы для площади, например:

$$B = 2e_2 + 3e_3 = 2N - 8S - 2 + 6S = 2N - 2S - 2$$
$$S = N - \frac{B}{2} - 1 = I + \frac{B}{2} - 1$$

Плоскость

Теперь найдем N_k:

$$N_k = e_1 + (k+1)e_2 + \frac{k^2+3k+2}{2} \cdot e_3 = 2S - N + 2 + (k+1)(N - 4S - 1) +$$

$$+ \frac{k^2+3k+2}{2} \cdot 2S = Sk^2 + (N - S - 1)k + 1$$

Применяя формулу Пика получаем:

$$N_k = Sk^2 + \frac{B}{2}k + 1$$

Определим N_{-k} следующим образом:

$$N_{-k} = S(-k)^2 + \frac{B}{2}(-k) + 1 = Sk^2 - \frac{B}{2}k + 1$$

Плоскость

Пусть I_k и B_k - количество целых точек внутри и на границе образа многоугольника при гомотетии с коэффициентом k соответственно, S_k - площадь образа многоугольника. Тогда

$$S_k = k^2 S = I_k + \frac{B_k}{2} - 1$$

$$I_k = k^2 S - \frac{B_k}{2} + 1$$

Несложно проверить, что $B_k = B \cdot k$. Тогда верно следующее:

$$I_k = N_{-k}$$

Можно получить еще несколько интересных формул, например:

$$B = 4N - N_2 - 3$$

Самый простой способ убедиться в верности данной формулы: проверить ее для точки, отрезка и треугольника.

Плоскость

Рис.: Это пёсик. Он был в шаблоне презентации, и я решил не убирать его.

Трёхмерное пространство

Возьмём четыре фигуры:
точка (0; 0; 0);
отрезок с вершинами (0; 0; 0) и (1; 0; 0);
треугольник с вершинами (0; 0; 0), (1; 0; 0), (0; 1; 0);
тетраэдр с вершинами (0; 0; 0), (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1).

Для сохранения аддитивности будем рассматривать фигуры, объём пересечения которых равен 0.

Рассмотрим аналогичную таблицу для многогранника, добавив V - объем многогранника.

Трёхмерное пространство

	1	N	N_2	N_3	V	B
Точка	1	1	1	1	0	2
Отрезок	1	2	3	4	0	2
Треугольник	1	3	6	10	0	3
Тетраэдр	1	4	10	20	$\frac{1}{6}$	4

Из таблицы можно вывести следующее соотношение:

$$6V = N_3 - 3N_2 + 3N_1 - 1$$

Теорема Эрхарта-Макдональда

Рассмотрим функцию I_k (в плоскости). Она не является аддитивной. Однако будет верно следующее соотношение:

$$I_k(M_1) + I_k(M_2) + I_k(M_1 \cap M_2) = I_k(M_1 \cup M_2)$$

Если мы переопределим её как количество точек внутри, умноженное на -1 в степени размерности, то она будет удовлетворять аддитивности. При этом переопределении всё, что было доказано в пункте 2, остаётся верным, т.к. мы рассматривали плоскость.

(1) В n-мерном пространстве N_k - многочлен степени n от k ("многочлен Эрхарта"), причём старший коэффициент равен объёму исходного многогранника.

(2) Пусть $N_k(M) = f(k)$. Тогда верно следующее:

$$f(-k) = I_k(M)$$

Теорема Эрхарта-Макдональда

В двумерном случае теорема была доказана в пункте 2.

Рассмотрим трёхмерный случай. Рассмотрим тетраэдр, заданный следующим образом:

$$0 \leq x \leq y \leq z \leq k$$

Найдем N_k. Для этого перепишем неравенство в виде:

$$0 \leq x < y + 1 < z + 2 \leq k + 2$$

Теперь видно, что $N_k = \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{6}$.

Найдем I_k. Для этого должно выполняться следующее:

$$0 < x < y < z < k$$

Тогда $I_k = (-1) \cdot \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6}$

Теорема Эрхарта-Макдональда

Теперь вернёмся к нашей таблице и заполним её:

	N_k	I_k
Точка	1	1
Отрезок	$k+1$	$(-1)\cdot(k-1)$
Треугольник	$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$	$\frac{(k-1)(k-2)}{2}$
Тетраэдр	$\frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{6}$	$(-1)\cdot\frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{6}$

Так как новая функция I_k аддитивна, и теорема выполняется для данных фигур, значит теорема верна для произвольной фигуры. Несложно повторить этот способ для произвольной размерности.

Немного о сумме $S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k$

Для начала рассмотрим $S_2(n+1)$. Рассмотрим пирамиду с вершиной в точке $(0;0;n)$ и квадратным основанием с вершинами в точках $(0;0;0)$, $(n;0;0)$, $(0;n;0)$, $(n;n;0)$. $S_2(n+1)$ выражает количество целых точек в этой пирамиде (в плоскости $z = n - i$ лежит ровно $(i+1)^2$ целых точек).
Аналогично $S_k(n+1)$ - количество целых точек в $(k+1)$-мерной пирамиде высоты n с основанием в виде k-мерного куба со стороной n. Но из доказанного ранее это многочлен степени $k+1$. Теперь выпишем наши многочлены для k от 2 до 7 (их можно найти с помощью метода неопределённых коэффициентов) и найдем какие-нибудь закономерности:

Немного о сумме $S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + 0$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + 0 - \frac{1}{30}n$$

$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 + 0 - \frac{1}{12}n^2 + 0$$

$$S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + 0 - \frac{1}{6}n^3 + 0 + \frac{1}{42}n$$

$$S_7(n) = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 + 0 - \frac{7}{24}n^4 + 0 + \frac{1}{12}n^2 + 0$$

Немного о сумме $S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k$

Напишем следующие соотношения:

$$n^k = S_k(n) - S_k(n-1)$$

$$S_k(n) = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + ...$$

$$S_k(n-1) = a_{k+1}(n-1)^{k+1} + a_k(n-1)^k + ...$$

Откуда имеем

$$n^k = a_{k+1}(k+1)n^k - a_{k+1}\frac{k(k+1)}{2}n^{k-1} + a_k kn^{k-1} + ...$$

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

$$a_k = \frac{1}{2}$$

Также с помощью пункта 4 можно вывести, что каждый второй коэффициент после $\frac{1}{2}$ равен 0.

Немного о сумме $S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k$

В общем виде эту сумму помогают записать числа Бернулли:

$$\sum_{n=0}^{N-1} n^k = \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^{k} C_{k+1}^{s} B_s N^{k+1-s}$$

Их можно находить с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$B_0 = 1$$

$$B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k+1} B_{n-k}$$