Теорема Коши о жесткости

Формулировка

Формулировка теоремы:

Если два трехмерных выпуклых многогранника P и P' комбинаторно эквивалентны, а их соответствующие грани конгруэнтны, то углы между соответствующими парами смежных граней равны (и, следовательно, многогранник P конгруэнтен многограннику P').

Определение

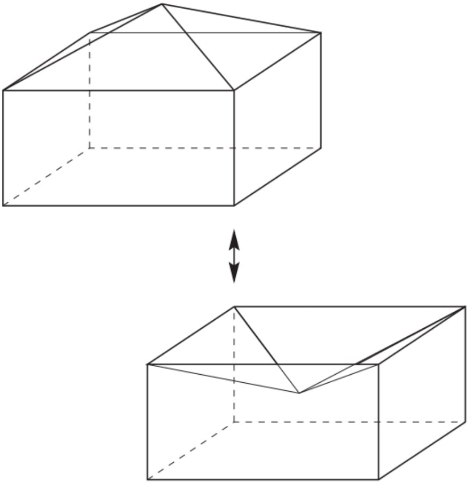
Если для многогранников P и P' существует афинное отображение, сохраняющее длины и переводящие многогранник P в многогранник P', то такие многогранники зовутся *конгруэнтными*.

Определение

Если существует биекция множества граней многогранника P в множество граней многогранника P', сохраняющая размерность и пересечения граней, то такие многогранники зовутся *комбинаторно эквивалентными*.

Примичание

Выпуклость имеет важное значение в формулировке теоремы:



Шаг 0.1

Лемма 1

Пусть G - произвольный непустой простой плоский граф с $n > 2$ вершинами. Тогда если каждое ребро графа G окрашено одним из двух цветов, то в G существует вершина, при обходе вокруг которой цвета инцидентных ей рёбер изменяются не более двух раз.
Без ограничения общности, граф G можно считать связным (между любой парой вершин графа существует хотя бы один путь).

Шаг 0.1

Доказательство леммы 1. Вспомним известные для связного плоского графа: *k-грань* - грань, ограниченная k рёбрами; f_k - число k-граней; f = $f_1 + f_2 + f_3 + \dots$

2e = $f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \dots$ (1); где e - количество рёбер графа.

Шаг 0.1

Итак, перейдём к доказательству. Пусть c - число углов между соседними рёбрами с общей вершиной, в которых изменяется цвет рёбер. Предположим, что наше утверждение не верно.
Тогда, так как $2n < c$, и в каждой вершине цвет меняется чётное число раз, $4n \leq c$. Далее, каждая грань с 2k или 2k+1 сторонами может иметь не более 2k таких углов (по понятным причинам), и тогда находим:

$$4n \leq c \leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + \ldots$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + 8f_6 + 10f_7 + \ldots \\
&= 2(3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + 7f_7 + \ldots) \\
&-4(f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + \ldots) \\
&= 4e - 4f
\end{aligned}$$

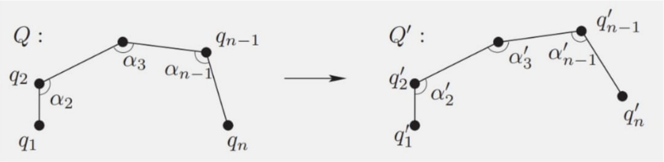
Но тогда $n + f \leq e$, что противоречит формуле Эйлера ($n - e + f = 2$).

Лемма 2 (лемма Коши о шарнире)

Пусть Q и Q' - выпуклые (плоские или сферические) n-угольники, помеченные так же, как на картинке ниже; длины их соответствующих сторон одинаковы ($\overline{q_i q_{i+1}} = \overline{q'_i q'_{i+1}}$, $1 \leq$ i $\leq$ n - 1), а углы удовлетворяют условиям $\alpha_i \leq \alpha'_i$, $2 \leq$ i $\leq$ n - 1. Тогда для длины "отсутствующего" ребра справедливо неравенство

$$\overline{q_1 q_n} \leq \overline{q'_1 q'_n},$$

а равенство достигается только и только тогда, когда $\alpha_i = \alpha'_i$ для всех i.



Доказательство

Воспользуемся индукцией по n. Базой послужит просто случай n = 3: если в треугольнике увеличить угол γ между двумя сторонами фиксированной длины a и b, то длина соответствующей третьей стороны c возрастет. Это следует из теоремы косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(\gamma)$$

в плоском случае, и из аналогичного равенства

$$cos(c) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)cos(\gamma)$$

в сферической тригонометрии. В последней длины a, b и c измеряются по поверхности сферы единичного радиуса, и поэтому принимают значения на отрезке $[0;\pi]$.

Шаг 0.2

Доказательство

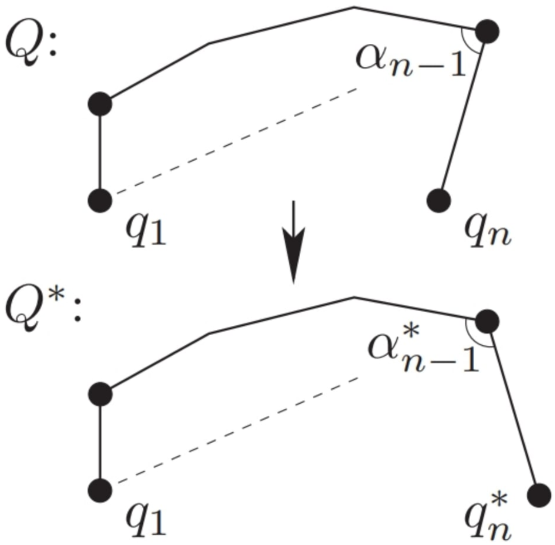
Шаг: $n > 3$, и лемма справедлива для многоугольников с числом вершин, меньших n. Если для какого-либо $i \in \{ 2, \dots , n - 1\}$ справедливо $\alpha_i = \alpha'_i$, то мы просто отсекаем соответствующие вершины диагональю, связывающими q_{i-1} и q_{i+1} (или соответственно q'_{i-1} и q'_{i+1}) и так как по предположению индукции $\overline{q_{i-1}q_{i+1}} = \overline{q'_{i-1}q'_{i+1}}$, то шаг индукции обоснован в силу разбиения исходного многоугольника на два с меньшим количеством вершин. Поэтому осталось рассмотреть случай, в котором для всех i от 2 до n-1 выполняется $\alpha_i < \alpha'_i$.

Шаг 0.2

Доказательство

Продолжение шага: построим по Q многоугольник $Q*$, заменив угол α_{n-1} наибольшим возможным углом $\alpha_{n-1}* \leq \alpha'_{n-1}$, при котором сохраняется выпуклость $Q*$. Чтобы сделать это, заменим в Q вершину q_n вершиной q_n*, сохраняя фиксированными все другие вершины q_i, длины сторон и велечины углов. Если $Q*$ остаётся выпуклым даже при $\alpha_{n-1}* = \alpha_{n-1}*$, то неравенства $\overline{q_1 q_n} < \overline{q_1 q_n*} \leq \overline{q'_1 q'_n}$ следуют из приведённых выше рассуждений индукции или случая n = 3.

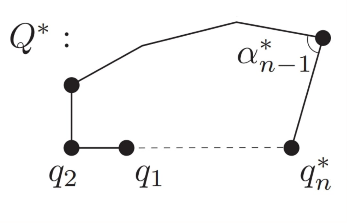
Иллюстрация "удачного" случая



Доказательство

Продолжение шага: в противном случае, после указанного не тождественного преобразования (приводящего к неравенству $\overline{q_1 q_n *} > \overline{q_1 q_n}$ (1)), мы "застреваем" в силу выпуклости в положении, когда q_1, q_2 и $q_n *$ коллинеарны, а именно

$$\overline{q_2 q_1} + \overline{q_1 q_n *} = \overline{q_2 q_n *} \qquad (2)$$



Шаг 0.2

Доказательство

Продолжение шага: теперь можно применить предположение индукции к многоугольникам $Q*$ и Q' без вершин q_1 и q_1' соответственно, в результате чего получаем

$$\overline{q_2 q_n *} \leq \overline{q_2' q_n'} \qquad (3)$$

Следовательно,

$$\overline{q_1' q_n'} \overset{(*)}{\geq} \overline{q_2' q_n'} - \overline{q_1' q_2'} \overset{(3)}{\geq} \overline{q_2 q_n *} - \overline{q_1 q_2} \overset{(2)}{=} \overline{q_1 q_n *} \overset{(1)}{>} \overline{q_1 q_n}$$

где переход (*) - неравентсво треугольника, а все остальные соотношение только что были доказаны.

Повторим формулировку

Формулировка теоремы Коши о жесткости:

Если два трехмерных выпуклых многогранника P и P' комбинаторно эквивалентны, а их соответствующие грани конгруэнтны, то углы между соответствующими парами смежных граней равны (и, следовательно, многогранник P конгруэнтен многограннику P').

Шаг 1

Доказательство

Пусть даны два таких многогранника P и P'. Раскрасим рёбра многогранника P: сделаем ребром чёрным (или "положительным") если соответствующий ему внутринний угол между двумя смежными гранями в P' больше, чем в P; и белым (или "отрицательным"), если этот угол меньше.
Множество чёрных и белым ребер многогранника P образуют 2-окрашенный плоский граф на его поверхности. Этот граф с помощью центральной проекции из внутренней точки многогранника P можно отобразить на поверхность единичной сферы; причём, если у многогранников P' и P есть неравные углы, то этот граф не пуст.
Из леммы 1 получаем, что существует вершина p многогранника P, которая является концом хотя бы одного черного или белого ребра и при циклическом обходе вокруг которой происходит не более двух изменений цвета ребер.

Шаг 1

Продолжение доказательства

Теперь пересечём многогранник P сферой S_ϵ маленького радиуса ϵ с центром в вершине p, а многогранник P' пересечём сферой S'_ϵ такого же радиуса ϵ с центром в соответствующей вершине p'. При этом на S_ϵ и S'_ϵ образуются выпуклые сферические многогранники Q и Q', у которых соответствующие стороны (дуги) имеют равные длины, поскольку грани P и P' конгруэнтны, а сферы S_ϵ и S'_ϵ равны. Отметим знаком "+" углы многоугольника Q, для которых соответствующие им углы в Q' больше; а знаком "-" - те, что меньше. Таким образом, при переходе от Q к Q' положительные углы увеличиваются, а отрицательные - уменьшаются; в то время как длины всех дуг и величины неотмеченных углов остаются неизменными.

Шаг 1

Продолжение доказательства

Согласно выбору вершины p, в Q существуют вершины, помеченные знаками "+" или "-", и при циклическом обходе вершин Q происходит не более двух изменений знака. Если бы все пометки имели один тип (+ или -), то это противоречило бы лемме 2, согласно которой одно ребро должно изменить свою длину - действительно, применив лемму для всего многоугольника Q и всего Q', мы бы получили равенство сторон, что возможно тогда и только тогда, когда углы равны. Если же существуют отметки обоих типов, то (так как в силу леммы 1 знак изменится лишь дважды) существовала бы "граница" (дуга большого круга), соединяющая середины двух сторон многоугольника и отделяющая все знаки "+" от всех знаков "-". Но это вновь противоречит лемме 2, так как согласно ей "граница" в Q' должна была бы быть одновременно и короче, и длиннее "границы" в Q.

Забавно, что только в 1977 году был найдем невыпуклый многогранник (без самопересечений), который допускает непрерывное преобразование, сохраняющее его грани плоскими и конгруэнтными.