

О группе преобразований рациональных тэнглов

Михаил Михайлов

16 декабря 2020

Введение. Группа $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$

Определение 1.1. Расширенная комплексная плоскость $\bar{\mathbb{C}}$ — комплексная плоскость с бесконечно удаленной точкой ∞

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Определение 1.2. Преобразованием Мёбиуса расширенной комплексной плоскости называется преобразование вида:

$$f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \\ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Где $ad - bc \neq 0$ и дополнительно полагается

$$\begin{cases} c = 0: f(\infty) = \infty \\ c \neq 0: f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty \text{ и } f(\infty) = \frac{a}{c} \end{cases}$$

Предложение 1.3. Композиция преобразований Мёбиуса — преобразование Мёбиуса

Доказательство.

$$f(z) = \frac{a_f z + b_f}{c_f z + d_f} \\ g(z) = \frac{a_g z + b_g}{c_g z + d_g}$$

Вычислим композицию.

$$f \circ g = \frac{a_f \left(\frac{a_g z + b_g}{c_g z + d_g} \right) + b_f}{c_f \left(\frac{a_g z + b_g}{c_g z + d_g} \right) + d_f} = \frac{a_f a_g z + b_g a_f + b_f c_g z + d_g b_f}{c_f a_g z + b_g c_f + d_f c_g z + d_g d_f} = \frac{z(a_f a_g + b_f c_g) + (b_g a_f + d_g b_f)}{z(c_f a_g + d_f c_g) + (b_g c_f + d_g d_f)}$$

Пусть $h = f \circ g$,

$$h = \frac{a_h z + b_h}{c_h z + d_h}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} a_h = a_f a_g + b_f c_g \\ b_h = b_g a_f + d_g b_f \\ c_h = c_f a_g + d_f c_g \\ d_h = b_g c_f + d_g d_f \end{cases}$$

Покажем теперь, что $a_h d_h - b_h c_h \neq 0$:

$$(a_f a_g b_g c_f + b_f c_g b_g c_f + a_f a_g d_f d_g + b_f c_g d_f d_g) - (c_f a_g d_g b_f + d_f c_g d_g b_f + d_f c_g b_g a_f + c_f a_g b_g a_f) = \\ = a_g d_g (a_f d_f - b_f c_f) - c_g b_g (a_f d_f - b_f c_f) = (a_g d_g - b_g c_g) \cdot (a_f d_f - b_f c_f) \neq 0$$

□

Следствие 1.4. Так как матрица обратима тогда и только тогда, когда ее определитель не 0, преобразования Мёбиуса образуют группу, изоморфную группе $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ обратимых матриц 2×2 с точностью умножения на ненулевой скаляр.

Каждому преобразованию ставится в соответствие матрица 2×2 :

$$\frac{a_f z + b_f}{c_f z + d_f} \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Определение 1.5. Модулярная группа $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ — группа всех матриц 2×2 A таких что

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \det A = 1 \wedge a, b, c, d \in \mathbb{Z},$$

и матрицы A и $-A$ отождествляются.

Замечание. Отождествление матриц разного знака равносильно отождествлению всех матриц отличающихся на скаляр

Теорема 1.6.

$$\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \cong \langle S, T \mid S^2, (ST)^3 \rangle$$

$$S: z \mapsto \frac{1}{-z}$$

$$T: z \mapsto z + 1$$

Доказательство. Доказательство — Alperin, Roger C. (April 1993). “ $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ “. Amer. Math. Monthly. 100 (4): 385–386. □

Лемма 1.7. Обозначим:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда, любой элемент $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ допускает представление в виде VF , где $V \in \{E, S\}$, F — слово над алфавитом $\{T, L\}$ или над алфавитом $\{T^{-1}, L^{-1}\}$

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из следующих соотношений:

$$ST = L^{-1}S, SL = T^{-1}S, ST^{-1} = LS, SL^{-1} = TS$$

выполненных в группе $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$. □

Рациональные тэнглы. Базовые определения

Определение 2.1. **2-тэнглом** (далее просто тэнглом) называются две дуги α_1, α_2 *вложенные* (properly embedded) в шар B^3 , причем концы дуг расположены на границе шара и не совпадают.

Множество всех 2-тэнглов обозначим за \mathcal{T} .

Пример.

Определение 2.2. Два тэнгла называются:

- **Эквивалентными**, если между ними существует изотопия переводящая один тэнгл в другой, в который концы дуг двигаются по поверхности шара, а сами дуги не покидают его.
- **Изотопными**, если между ними существует изотопия переводящая один тэнгл в другой, в который концы дуг остаются фиксированными, а внутренности дуг не покидают внутренности шара B^3 . Отношение изотопности мы обозначим за \sim .

Мы будем рассматривать тэнглы с точностью до изотопии.

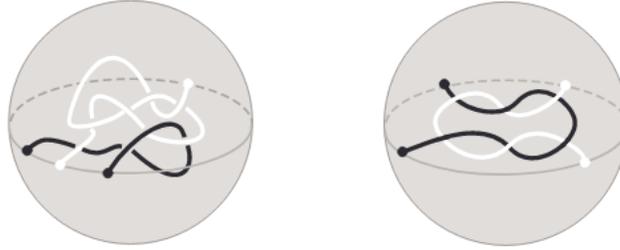


Рис. 1: Два тэнгла

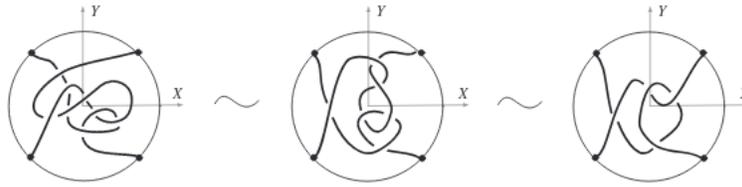


Рис. 2: Диаграммы изотопных тэнглов

Определение 2.3. Тэнгл называется **тривиальным**, если его дуги не зацеплены. Тэнглы Γ_V и Γ_H изображена на рисунке 3

Пример.



Рис. 3: Два тривиальных тэнгла и порядок нумерации концов

Замечание. Другими словами, два тэнгла изотопны, если существует последовательность движений Редемайстера, которая не затрагивает концы и переводит одну диаграмму тэнгла в другую.

Определение 2.4. Тэнгл называется **рациональным**, если он эквивалентен тривиальному, т.е. существует гомеоморфизм h :

$$h : (B^3, \alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (D^2 \times I, \{x, y\} \times I)$$

Определение 2.5. Определим отображения на \mathcal{T} :

$$X_i^+ : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} \tag{1}$$

$$i \in \{1, 2, 3, 4\} \tag{2}$$

Преобразование X_i^+ закручивает i -ый и $i + 1$ -ый конец дуг по часовой стрелке (см. рис. 4). Преобразование X_i^- определяется как обратное к X_i^+ .

Введем также множество

$$\mathfrak{G} = \{X_i^\pm \mid i \in \{1, 2, 3, 4\}\} \cup \{E\},$$

где $E - id_{\mathcal{T}}$

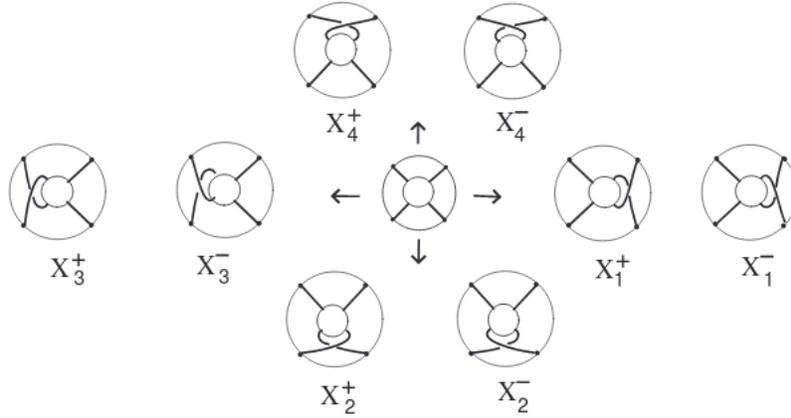


Рис. 4: Отображения X_i

Определение 2.6 (альтернативное определение). Тэнгл Γ называется **рациональным** тогда и только тогда, когда существует такая функциональная последовательность $\{Y_i\}_{i=1}^n, Y_i \in \mathfrak{G}$, что:

$$\Gamma = \left(\bigcirc_{i=1}^n Y_i \right) (\Gamma_0)$$

где $\Gamma_0 \in \{\Gamma_H, \Gamma_V\}$

Лемма 2.7. Определения 2.4 и 2.6 равносильны.

Доказательство.

Очевидно, что всякий рациональный тэнгл в смысле 2.6 будет рациональным и в смысле 2.4.

Пусть теперь у нас есть рациональный тэнгл $(B^3, \alpha_1, \alpha_2)$ в смысле 2.4. Тогда существует гомеоморфизм

$$h : (B^3, \alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (D^2 \times I, \{x, y\} \times I)$$

Рассмотрим сужение $\hat{h} = h|_{S_2}$ где $S_2 = \Delta B^3$. Обозначим за ρ четыре конца дуг α_1, α_2 в S_2 .

Понятно, что $\hat{h} : (S_2, \rho) \rightarrow (S_2, \rho)$ — гомеоморфизм сферы S_2 с четырьмя отмеченными точками в себя. Известно [REF!], что \hat{h} может быть представлен с точностью до изотопии как композиция перекручиваний точек сферы S^2 . Тогда, каждое такое перекручивание будет индуцировать одно из перекручиваний тэнгла. Каждое такое перекручивание соответствует одному из движений X_i , поэтому $(B^3, \alpha_1, \alpha_2)$ будет представимо в каноническом виде. \square

Группа преобразований рациональных тэнглов и ее представление

Определение 3.1. Группа преобразований тэнглов $\mathcal{G} = \langle \mathfrak{G} \rangle$.

Исследуем соотношения в этой группе

Лемма 3.2 (Лемма о повороте на π). Справедливо, что:

- Поворот $\hat{\Gamma}$ относительно оси oY на π переводит тэнгл Γ в изотопный себе.
- Поворот Γ относительно оси oX на π переводит тэнгл Γ в изотопный себе.

Формально говоря, $\hat{\Gamma} = \text{Rot}_Y(\Gamma)$ и $\Gamma = \text{Rot}_X(\Gamma)$, но для простоты записи будет использоваться приведенная выше нотация

Доказательство. Будем доказывать лемму по индукции по длине наименьшего разложения тэнгла Γ в канонический вид.

База: тэнглы Γ_V и Γ_H инвариантны под действием этих преобразований. Тэнглы вида $X_i^\pm \Gamma_0$ тоже инвариантны под действием этих преобразований.

Индукционное предположение. Пусть $\Gamma = X_i^\pm \Phi$, причем для Φ выполнено $\Phi \sim \hat{\Phi}$

Индукционный переход: Рассмотрим следующие случаи

- $X_i^\pm = X_1^+$; Тогда:

$$\hat{\Gamma} = X_1^+ \hat{\Phi} \sim X_1^+ \Phi = \Gamma \quad (1)$$

$$\Gamma = X_3^+ \hat{\Phi} \underset{(1)}{\sim} X_1^+ \hat{\Phi} = \Gamma \quad (2)$$

- Остальные случаи — аналогично первому.

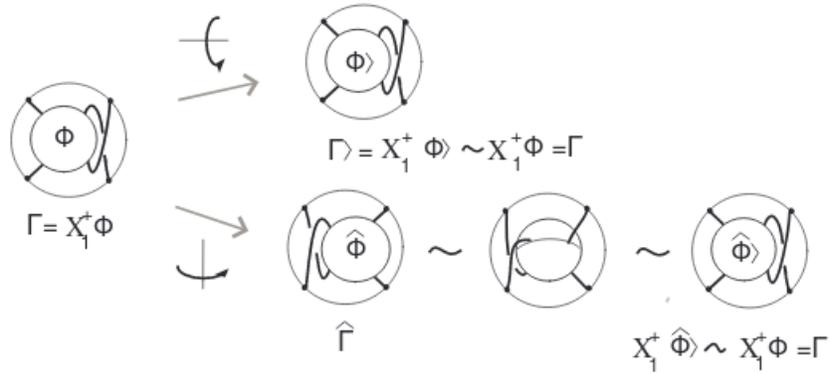


Рис. 5: К доказательству леммы о повороте на π

□

Следствие 3.3. Из леммы получаем, что

$$X_1^\pm \Gamma \sim X_3^\pm \Gamma \wedge X_4^\pm \Gamma \sim X_4^\pm \Gamma$$

Предложение 3.4. Поворот R относительно прямой $Y = X$ на π является инволюцией.

Доказательство. См. рис 6.

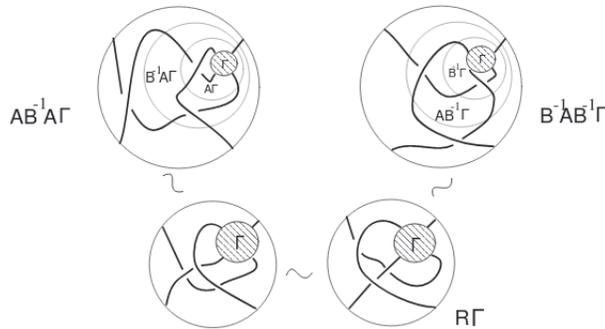


Рис. 6: К доказательству

□

Теорема 3.5. Пусть

$$\begin{aligned}\mu: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) &\rightarrow \mathcal{G} \\ E &\mapsto \mathrm{id}_{\mathcal{T}} \wedge T \mapsto \mathcal{A} \wedge S \mapsto \mathcal{R}\end{aligned}$$

И для всех остальных элементов продолжим до гомоморфизма.

Тогда, отображение μ корректно определено и является изоморфизмом

Доказательство.

1. Корректность. В силу [REF] группа \mathcal{G} имеет те же соотношения, что и $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, откуда получаем что $\mu: \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathcal{G}$

2. Сюръективность. Очевидна

3. Инъективность. Докажем от противного.

Пусть $Q, P \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, $Q \neq P$, но $\mu(Q) = \mu(P)$. Тогда $\mu(QP^{-1}) = \mathrm{id}_{\mathcal{T}}$, хотя $QP^{-1} \neq E$. С другой стороны, по лемме [REF] имеем, что QP^{-1} может быть представлено как VF

- $V = E$. Но тогда $\mu(QP^{-1}) = \mu(EF) = \mu(F)$. Но тогда тэнгл-образ содержит перекручивания только по часовой (против часовой стрелки). *Очевидно*, что такой тэнгл не может быть тривиальным.
- $V = S$. Тогда $\mu(QP^{-1}) = \mu(SF) = \mathrm{id}_{\mathcal{T}}$. После чего поймем что, если $\mu(SF) = \mathrm{id}$, то $\mu(F) = \mathcal{R}$. Но тогда $\mu(F^2) = \mathrm{id}_{\mathcal{T}}$. Чего не может быть, так как тэнгл-образ содержит перекручивания только по часовой (против часовой стрелки).

□

Доказательство очевидного факта оставляется читателю в качестве упражнения.