Обозначения и определения. Символом $\{x\}$ будем обозначать *дробную долю* числа x. Например, $\{4,75\} = 0,75$, $\{0,5\} = 0,5$, а $\{\pi\} = \pi - 3$.
Пусть $T = T(x)$ — некоторое отображение, определённое на действительных числах или на некотором их подмножестве. *Траекторией* числа α под действием отображения T называется множество
$I = \{\alpha, T(\alpha), T(T(\alpha)), T(T(T(\alpha))), \dots\}$ всех образов числа α при многократном последовательном применении отображения T.
Прообразом множества A при отображении T называется множество всех точек, которые при применении T попадают в множество A.

1. $T(x) = \{kx\}$ — отображение полуинтервала $[0,\ 1)$ в себя, то есть $T : [0,1) \longrightarrow [0,1)$;
   $\mu([a,b)) = b - a$ — мера полуинтервала $[a,b)$ (она же — мера соответствующего отрезка и интервала).
   Чему равняется $\mu(T^{-1}([a,b)))$?
2. $T(x) = \{\frac{1}{x}\}$ — отображение полуинтервала $[0,\ 1)$ в себя, то есть $T : [0,1) \longrightarrow [0,1)$;
   $\mu([a,b)) = \frac{1}{ln2}\int\limits_a^b \frac{dx}{1+x}$ — мера полуинтервала $[a,b)$ (она же — мера соответствующего отрезка и интервала).
   Чему равняется $\mu(T^{-1}([a,b)))$?
3. Пусть α — рациональное число. Что можно сказать о его q-ичном разложении?
4. Для каждого n придумать последовательность (конечную) из цифр 0 и 1, в которой каждая из последовательностей нулей и единиц длины n встречается ровно 1 раз.

Определение. Подмножество A множества B называется *собственным*, если оно не совпадает со всем множеством B.

5. Привести пример множества на окружности, которое при повороте окружности на некоторый угол вокруг центра переходит в свое собственное подмножество.

Определение. Подмножество A отрезка $[0,1]$ называется *всюду плотным* в отрезке $[0,1]$, если для любой точки из отрезка существует сколь угодно близкая к ней точка из множества A.
Равносильное определение: Подмножество A отрезка $[0,1]$ называется *всюду плотным* в отрезке $[0,1]$, если в любом интервале $(a,b) \subset [0,1]$ найдется точка из множества A.
Разумеется, первый вариант определения можно обобщить, рассматривая вместо отрезка $[0,1]$ какое-то другое множество.
На лекции мы поняли, что в случае отображения $T = \{2x\}$ (аналогичное утверждение можно сформулировать и для некоторых других отображеий) $T(T(\dots(T(x))\dots)) = \{2^n x\}$ (где в левой части T применено n раз), поэтому траектория точки α под действием T будет иметь вид $\{\{2^n\alpha\} : n \in \mathbb{N}\}$.

6. Привести пример числа α, для которого траектория $\{2^n\alpha\}$:
   (a) Не всюду плотна;
   (b) Всюду плотна.

   (Удобно воспользоваться для этого двоичным разложением!)
7. Привести пример иррационального числа α, для которого траектория $\{3^n\alpha\}$ не всюду плотна.

Пример, который обсуждался в лекции, непосредственно связан с одним важным объектом, который интересен и сам по себе.

Определение 1. Канторово множество — это множество $K = K_3^1 = \{\alpha \in [0,1] : \alpha = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta_i 3^{-i}\}$ чисел, запись которых в двоичной системе счисления не содержит цифры 1.

Определение 2. Канторово множество — это множество, полученное из отрезка $[0,1]$ в результате следующей процедуры:

- На 1 шаге из отрезка выкидывается интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, то есть треть из середины. Остается два крайних отрезка;
- На n-м шаге из каждого из оставшихся 2^{n-1} отрезков выкидывается средняя треть.

8. Доказать, что два данных выше определения эквивалентны.

Определение канторова множества тоже может быть обобщено:

Определение 3. Канторово множество K_n^j — это множество $\{\alpha \in [0,1] : \alpha = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta_i n^{-i}\}$ чисел, запись которых в двоичной системе счисления не содержит цифры j.

9. Сформулировать для обобщенного канторова множества второе определение, аналогичное *Определению 2*, и доказать его эквивалентность *определению 3*.
10. Чему равна мера множества
    (a) K_3^1;
    (b) K_5^2;
    (c) K_n^j?
11. (a) Найти такое α, что $\alpha \in K_3^1 \cap K_5^2$;
    (b) Найти такое иррациональное α;
    (c) Решить ту же задачу для K_n^j.

Определение. Натуральные числа p и q независимы, если $\frac{lnp}{lnq}$.

Следующее утверждение мы оставим без доказательства.

Теорема (Касселс). Пусть p и q — независимые натуральные числа. Тогда $\exists\alpha$ такое, что траектория $\{p^n\alpha\}$ всюду плотна, а траектория $\{q^n\alpha\}$ не всюду плотна.