Об одном замечательном свойстве гиперкуба

Михаил Михайлов

20 января 2021

Воспоминания о линейной алгебре

Коротко и наглядно о главном

Определение 1.1. Отображение f называется **линейным преобразованием** векторного пространства V над полем K если:

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,\ \alpha, \beta \in K$$

Определение 1.2. Определителем матрицы A называется величина:

$$\det A = \sum_{\alpha \in S_n} \operatorname{sign}(\alpha) \cdot a_{1\alpha_1} \dots a_{n\alpha_n}$$

Определение 1.3. Матрица A называется **вырожденной** если $\det A = 0$.
Определение 1.4. Пусть дана квадратная матрица порядка n:

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Следом матрицы называется величина:

$$\operatorname{Tr}[A] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Предложение 1.5 (Интересное свойство следа).

$$\det(E + G\varepsilon) = 1 + \varepsilon \cdot \operatorname{Tr}[G] + o(\varepsilon) \tag{1}$$

Доказательство. Положим:

$$G_{n\times n} = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда,

$$\mathcal{D} := E + G\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon g_{11} & \dots & \varepsilon g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon g_{n1} & \dots & 1 + \varepsilon g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Покажем теперь что равенство 1 верно:

$$\det \mathcal{D} = \sum_{\alpha \in S_n} \operatorname{sign}(\alpha) \cdot d_{1\alpha_1} \dots d_{n\alpha_n}$$

Очевидно, что если $\alpha \neq (1,\dots,n)$, то $\operatorname{sign}(\alpha)\cdot d_{1\alpha_1}\dots d_{n\alpha_n} = o(\varepsilon)$. Поэтому:

$$\det\mathcal{D} = d_{11}\dots d_{nn} + o(\varepsilon) = \prod_{i=1}^{n}(1+\varepsilon g_{ii}) + o(\varepsilon)$$

Рассмотрим произведение

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\varepsilon g_{ii}) = 1 + \varepsilon\sum_{i=1}^{n} + D\varepsilon^2 = 1 + \varepsilon\mathrm{Tr}[G] + o(\varepsilon)$$

Где D — величина, которая содержит в себе слагаемые, содержащие в себе хотя бы два множителя вида εg_{ii}
Таким образом, получаем что:

$$\Delta = 1 + \varepsilon\cdot\mathrm{Tr}[G] + o(\varepsilon)$$

□

Замечение. Поймем смысл этого выражения: возьмем единичный куб, у которого слегка растянули или сжали ребра. Тогда основной вклад в изменение объема куба внесло растяжение каждого ребра вдоль себя, растяжение вдоль других ребер вносит сравнимо меньший вклад.

Собственные значения и вектора

Определение 1.6. Пусть L — линейное пространство над полем K, $A\colon L\to L$ — линейное преобразование.

Собственным вектором линейного преобразования A называется такой ненулевой вектор $x\in\mathbf{L}$, что для некоторого $\lambda\in K$:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Скаляр $\lambda\in K$, такой что относительно него существует $\mathbf{x}\in L$, что выполнено равенство выше называется **собственным значением** преобразования A.

Предложение 1.7. Если K — алгебраически замкнуто, то у каждого линейного преобразования A порядка n есть ровно n собственных значений.

Доказательство. Заметим, что $\det(A-\lambda I) = 0$ тогда и только тогда, когда λ — собственное значение A:

Пусть $\mathbf{v}\neq 0$ и $A\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}$, тогда $(A-\lambda_0 I)\mathbf{v} = 0$ и значит $A-\lambda_0 I$ вырождена.

Теперь, пусть $\det(A-\lambda_0 I) = 0$. Тогда, по свойству вырожденной матрицы существует $\mathbf{v}\neq 0$ такое что: $(A-\lambda_0 I)\mathbf{v} = 0$, а значит $A\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}$ и λ_0 — собственное значение.

С другой стороны, $\det(A-\lambda I)$ является многочленом от λ степени n, а значит в силу замкнутости K имеет n корней с учетом кратности. □

Определение 1.8. Многочлен $\det(A-\lambda I)$ называется **характеристическим многочленом** $\chi(A)$ матрицы A.

Предложение 1.9. Сумма собственных значений A есть $\mathrm{Tr}[A]$

Доказательство. Пусть A — квадратная матрица порядка n:

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим:

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Нетрудно видеть, что:
$$\det(A-\lambda I) = (-1)^n\left(\lambda^n - \mathrm{Tr}[A]\lambda^{n-1} + \ldots + \det A\right)$$

С другой стороны, по предложению 1.7 имеем:

$$\det(A-\lambda I) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$$

Где λ_i — i-ое собственное значение х.м.

По теореме Виета получаем:

$$\mathrm{Tr}[A] = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

□

Предложение 1.10. Если A имеет собственные значения $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, то A^k имеет собственные значения $\lambda_1^k,\ldots,\lambda_n^k$

Доказательство. Докажем по индукции. База $k=1$ выполнена по условию. Пусть $\mathbf{v}$ — собственный вектор A:
$$A^k\mathbf{v} = A^{k-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(A^{k-1}\mathbf{v}) = \lambda^k\mathbf{v}$$

□

Определение 1.11. Пусть $f,g\in\mathbb{R}[x]$ имеют реальные корни $r_1\leqslant\ldots\leqslant r_n$ и $s_1\leqslant\ldots\leqslant s_{n-1}$ соответственно.

Тогда f **оплетает** g если
$$r_1\leqslant s_1\leqslant r_2\leqslant\ldots\leqslant s_{n-1}\leqslant r_n$$

Предложение 1.12 (Критерий оплетания многочленов). f оплетает g тогда и только тогда, когда $f+\alpha g$ имеет все вещественные корни при любом значении α.

Доказательство. Без доказательства. □

Теорема 1.13 (Теорема Коши о переплетении собственных значений). Пусть A — симметричная матрица над $\mathbb{R}$, B — её принципиальная подматрица, тогда $\chi(A)$ оплетает $\chi(B)$

Доказательство. Не теряя общности положим

$$A = \begin{pmatrix} B & x\\ x & y\end{pmatrix}$$

Рассмотрим следующую конструкцию:

$$\begin{vmatrix} B-\lambda I & x\\ x & y+\alpha-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B-\lambda I & x\\ x & y-\lambda\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B-\lambda I & x\\ 0 & \alpha\end{vmatrix} = \chi(A)+\alpha\chi(B)$$

Так как в левой части находится матрица над $\mathbb{R}$ то по предложению ее характеристический многочлен имеет все корни при любом α, а значит по предложению 1.12 $\chi(A)$ оплетает $\chi(B)$ □

Следствие 1.14. Пусть A симметричная матрица порядка n, и B — её принципиальная подматрица порядка m. Если $\lambda_1\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n$ — собственные значения A, а $\mu_1\geqslant\ldots\geqslant\mu_n$ собственные значения B, то:

$$\lambda_i\geqslant\mu_i\geqslant\lambda_{i+n-m}$$

Двоичный гиперкуб и его граф

Определение 2.1. Обозначим за Q^n **граф гиперкуба**.

Более формально:

- $Q_1 = K_2$
- $Q_n = Q_{n-1} \square K_2$ при $n > 1$.

Замечание. Здесь $\square$ — прямое произведение графов: $G \square H$ графов G и H – это граф, такой, что

- множество вершин графа $G \square H$ — это прямое произведение $V(G) \times V(H)$
- любые две вершины (u, u') и (v, v') смежны в $G \square H$ тогда и только тогда, когда
  - либо $u = v$ и u' смежна v' в H,
  - либо $u' = v'$ и u смежна v в G.

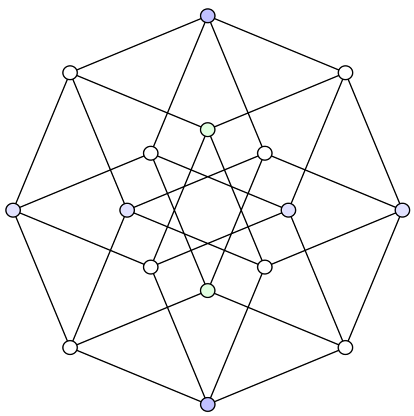

Рис. 1: Q^4

Лемма 2.2. Построим матричную последовательность A_n:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & I \\ I & -A_{n-1} \end{pmatrix}$$

Тогда:

1. Собственные значения A_n это $\sqrt{n}$ с кратностью 2^{n-1} и $-\sqrt{n}$ с той же кратностью.
2. Заменив все -1 на 1 в A_n мы получим матрицу смежности Q^n

Доказательство.

$\boxed{1}$ Покажем по индукции, что $A_n^2 = nI$. Для $n = 1$: $A_1^2 = I$. Предположим теперь что для всех $k < n$: $A_k^2 = kI$. Покажем тогда что $A_n^2 = nI$:

$$A_n^2 = \begin{pmatrix} A_{n-1}^2 + I & 0 \\ 0 & A_{n-1}^2 + I \end{pmatrix} = nI$$

Тогда $\lambda_i(A_n) = \pm\sqrt{n}$ по предложению 1.10. Так как $\mathrm{Tr}[A_n] = 0$ (можно видеть по индукции), то ровно половина это $+\sqrt{n}$ и ровно половина $-\sqrt{n}$.

$\boxed{2}$ Очевидно следует из определения 2.1. $\square$

Лемма 2.3. Если H — произвольный граф, A симметричная матрица с элементами из $\{-1, 0, 1\}$, проиндексированная $V(H)$ и при этом, $A_{uv} = 0$ тогда и только тогда, когда между вершинами u и v нет ребра, то верно:

$$\Delta(H) \geqslant \lambda_1 := \lambda_1(A)$$

где $\lambda_1(A)$ — наибольшее собственное значение A.

Доказательство. Пусть $\mathbf{v}$ соответствует λ_1. Не теряя общности положим, что v_1 его наибольшая большая компонента. Тогда:

$$|\lambda_1 v_1| = \left|(Av)_1\right| = \left|\sum_{j=1}^{m} A_{1j} v_j\right| \leqslant |v_1| \sum_{j=1}^{m} \left|A_{1j}\right| \leqslant |v_1| \Delta(H)$$

□

Теорема 2.4. Пусть H — произвольный подграф Q^n на $2^{n-1}+1$ вершинах. Тогда $\Delta(H) \geqslant \sqrt{n}$.

Доказательство. По лемме 2.2 имеем что определенная в ней матрица A_n с заменой -1 на 1 будет матрицей смежности Q^n. Тогда, пусть H произвольный подграф Q^n с $2^{n-1}+1$ вершинами, соответствующую ему подматрицу в A_n обозначим A_H. По лемме 2.3 имеем:

$$\Delta(H) \geqslant \lambda_1(A_H)$$

По следствию 1.14 из теоремы Коши о переплетении имеем что:

$$\lambda_1(A_H) \geqslant \lambda_{2^{n-1}}(A_n)$$

По лемме 2.3 имеем:

$$\lambda_{2^{n-1}}(A_n) = \sqrt{n}$$

Тогда

$$\Delta(H) \geqslant \sqrt{n}$$

□