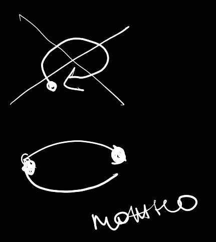
G – граф



Остовное дерево $G' \subset G$

$V(G) = V(G')$

$E(G') \subset E(G)$

G' – дерево

связный граф $\Leftrightarrow$ без циклов

$|V(G')| - 1 = |E(G')|$

V(G) – вершины

E(G) – рёбра

Вопрос: Найти число остовных деревьев для данного графа G

$|V(G)| = p \qquad |E(G)| = q$

Данные о примыкании вершин и рёбер

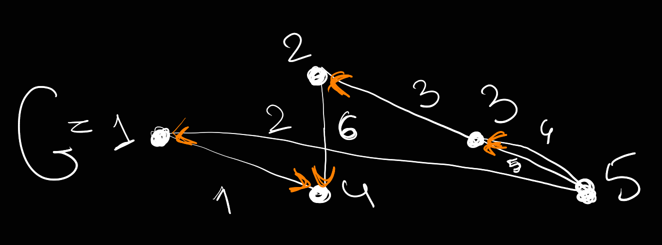
1) Матрица смежности

$$A(G) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{p} p$$

$$i \overset{a_{ij}}{=\!=} j \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

2) Матрица инцидентности

$$M(G)_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если ребро } e_j \text{ начиналось в } v_i \\ 1, & \text{если ребро } e_j \text{ закан. в } v_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

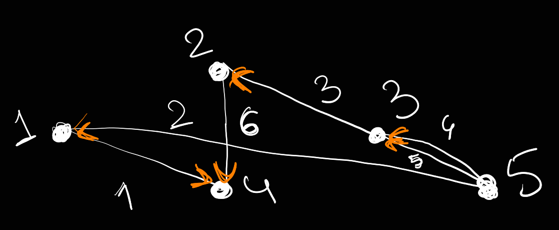
$G =$ 

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(G) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Матрица Лапласа

$$L(G)_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i \overset{a_{ij}}{=\!=} j \\ \deg v_i & i = j \end{cases}$$



$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$MM^T = L$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \overset{M^T}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & a_2 & \\ 0 & & a_3 \\ & & & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots \cdot a_n$$

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Теорема (матричная теор. о деревьях)

Пусть G – связный граф без петель, L – его матрица Лапласа, L_0 – L без последней строки и столбца

Тогда $\det L_0$ = число остовных деревьев

Пусть G связен

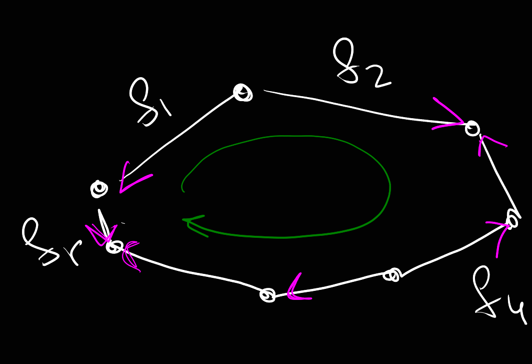
$M(G) \rightsquigarrow M_0(G)$ урезанная матрица инцидентности, размера $(p-1) \times q$ — M без последней строки

Лемма Пусть $S \subset E(G)$ $(|S| = p-1)$, $M_0[S]$ – соотв. подматрица

i Если S – остовное дерево, то $\det M_0[S] = \pm 1$

ii В противном случае $\det M_0[S] = 0$

□ (ii) S – не дерево ⇒ в нём есть цикл $s_1, \dots, s_r$

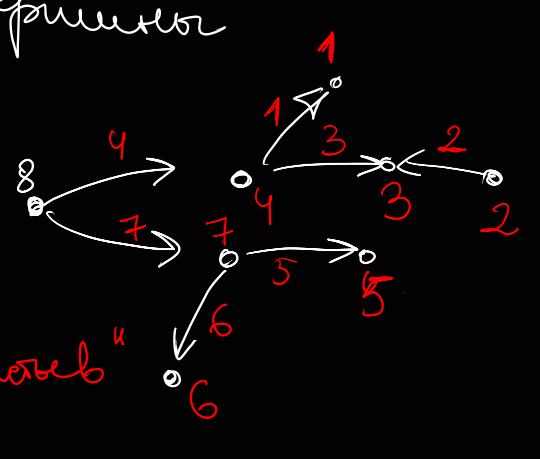


$$0 = -f_1 + f_2 - f_3 - f_4 \pm \dots - f_r$$

(i) Пусть S – остовное дерево $\begin{pmatrix} 1 & & * \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Пусть $u_1, \dots, u_p$ – вершины

Перенумеруем рёбра и вершины в порядке «опадающих листьев»



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & 1 & 0 \cdots 0 \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad M[S]$$

■

$\det L_0$ – L без последней строки и последнего столбца

Теорема (Binet – Cauchy)

$$\underset{p \times q}{\det A} \underset{q \times p}{B} = \sum_{\substack{S \subset \{1, \dots, p\} \\ |S| = q}}' \det(A_{[q], S}) \det(B_{S, [q]})$$

Д-во матричной теоремы о деревьях:

$$\det L_0 = \det M_0 M_0^T = \sum_{S \subset E(G)}' \det M_0[S] \det M_0^T[S] =$$

$$= \sum_{S \subset E(G)}' \det{}^2 M_0[S] = \sum_{\substack{S \subset E(G) \\ \text{остовное дерево}}}' 1$$

■

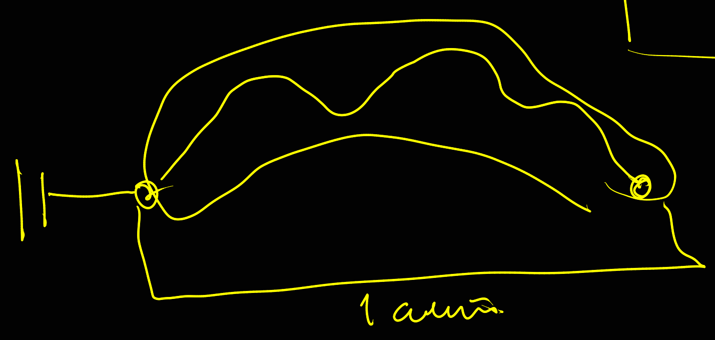
Следствие: $L(G)$ – $\mu_1, \dots, \mu_p = 0$ – собств. значения матрицы Лапласа

$$\# \text{ остовных деревьев} = \frac{1}{p} \mu_1 \cdots \mu_{p-1}$$

$$T(G, \overset{\uparrow}{y}) = \sum_{S \subset G} y_{i_1} \cdots y_{i_k}$$

пол. числа

проводимость из вершины a в вершину b

$$\boxed{\frac{T(G/\underline{ab}\,; y)}{T(G; y)}}$$