

## 2 ТУР ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДЫ СУНЦ МГУ. 9 КЛАСС

1. На сторонах  $AC$  и  $BC$  равнобедренного ( $AC = BC$ ) треугольника  $ABC$  лежат точки  $N$  и  $M$  так, что  $\angle ABN = \angle CNM$ , а  $NM = MC$ . Найдите отношение угла  $CAB$  к углу  $ACB$ , если  $\angle NBC = 60$ .

*Ответ:* 4.

2. Дан многочлен  $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 2019x^{2019} + 2020x^{2020}$ . Сколько у него общих корней с многочленом  $g(x) = (x + 1) + 3x^2(x + 1) + 5x^4(x + 1) + \dots + 2019x^{2018}(x + 1)$ ?

*Ответ:* 0

3. На окружности против часовой стрелки отмечены 7 точек:  $A, B, C, D, E, F, G$ . Угол  $FAC$  в 2 раза меньше угла  $ACE$ , в 3 раза меньше угла  $CEG$ , в 4 раза меньше угла  $EGB$ , в 5 раз меньше угла  $GBD$ , в 6 раз меньше угла  $BDF$  и в 7 раз меньше угла  $DFA$ . Найдите величину угла  $EBD$  в градусах. Численный ответ при необходимости округлите до десятых долей после запятой включительно.

*Решение.* Обозначим дугу  $CF$  (дуги отсчитываются против часовой стрелки) за  $\alpha$ ; тогда из условия и по теореме о вписанном угле  $EA = 2\alpha, GC = 3\alpha, EB = 4\alpha, GD = 5\alpha, BF = 6\alpha, DA = 7\alpha$ . Заметим, что суммарно эти дуги накрывают окружность 3 раза; значит,

$$\alpha + 2\alpha + \dots + 7\alpha = 3 \cdot 2\pi,$$

то есть  $28\alpha = 6\pi; \alpha = \frac{3\pi}{14}$ .

$DE + EA + AD = 2\pi$ , где величины дуг  $EA$  и  $AD$  равны  $2\alpha$  и  $7\alpha$ . Тогда  $DE = 2\pi - 9\alpha = \frac{28\pi - 27\pi}{14} = \frac{\pi}{14}$ .

Угол  $EBD$  опирается на дугу  $DE$ , поэтому он равен  $\frac{\pi}{28}$ .

*Ответ:*  $\frac{\pi}{28}$  радиан, или  $\frac{45}{7} = 6,4\dots$  градусов.

4. Найдите наименьшее число, которое имеет ровно 11 различных делителей (включая 1 и само это число).

*Ответ:* 1024

5. Функция  $f$  определена на всей вещественной прямой и такова, что

$$\begin{cases} f^2\left(\frac{7+4x}{3}\right) + f(x-12) = x^5 - 4x^2, \\ 2f(-8x+22) - f^2(x^2-5x+9) = \sqrt{x}. \end{cases}$$

Найдите  $f(-10)$ .

*Решение.* Подставим в первое уравнение значение  $x = 2$ , а во второе  $x = 4$ ; имеем систему:

$$\begin{cases} f^2(5) + f(-10) = 16, \\ 2f(-10) - f^2(5) = 2. \end{cases}$$

Сложим два уравнения:  $3f(-10) = 18$ , следовательно,  $f(-10) = 6$ .

*Ответ:* 6

6. В стране  $N$  10 городов, но нет дорог. Министр транспорта решил исправить эту ситуацию: он случайным образом выбирает два города, между которыми нет дороги, и указывает построить дорогу между ними. Какое наименьшее число указов он должен дать, чтобы из любого города можно было гарантированно попасть в любой другой?

*Ответ:* 37