

2 ТУР ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДЫ СУНЦ МГУ. 10 КЛАСС

1. В колоде у фокусника 36 карт. Он перемешивает колоду следующим образом: делит её на две части, в каждой не менее 5 карт, и меняет их местами; затем он показывает верхнюю карту, кладет её внизу колоды и перемешивает ещё раз, и так далее. Оказалось, что каждый раз фокусник умудряется показать пиковую даму. Какое наименьшее количество дам может быть у него в колоде?

Ответ: 2

2. Найдите наименьший корень уравнения

$$\sqrt{15}\sin x + \sqrt{5}\cos x - \sqrt{10}\cos\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{10}\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) = 4\sqrt{5},$$

лежащий правее числа 7π . Численный ответ при необходимости округлите до десятых долей после запятой включительно.

Ответ. $\frac{25\pi}{3}$, что приблизительно равно 26,2; засчитывается и ответ 26,1.

3. На окружности против часовой стрелки отмечены 7 точек: A, B, C, D, E, F, G . Угол FAC в 2 раза меньше угла ACE , в 3 раза меньше угла CEG , в 4 раза меньше угла EGB , в 5 раз меньше угла GBD , в 6 раз меньше угла BDF и в 7 раз меньше угла DFA . Найдите величину угла EBD в градусах. Численный ответ при необходимости округлите до десятых долей после запятой включительно.

Решение. Обозначим дугу CF (дуги отсчитываются против часовой стрелки) за α ; тогда из условия и по теореме о вписанном угле $EA = 2\alpha, GC = 3\alpha, EB = 4\alpha, GD = 5\alpha, BF = 6\alpha, DA = 7\alpha$. Заметим, что суммарно эти дуги покрывают окружность 3 раза; значит,

$$\alpha + 2\alpha + \dots + 7\alpha = 3 \cdot 2\pi,$$

то есть $28\alpha = 6\pi; \alpha = \frac{3\pi}{14}$.

$DE + EA + AD = 2\pi$, где величины дуг EA и AD равны 2α и 7α . Тогда $DE = 2\pi - 9\alpha = \frac{28\pi - 27\pi}{14} = \frac{\pi}{14}$.

Угол EBD опирается на дугу DE , поэтому он равен $\frac{\pi}{28}$.

Ответ: $\frac{\pi}{28}$ радиан, или $\frac{45}{7} = 6,4\dots$ градусов.

4. Функция f определена на всей вещественной прямой и такова, что

$$\begin{cases} 5f(2\sin t) - 3f(4 - 3\cos(t + \frac{\pi}{2})) = 28t^2, \\ 6f(-7\sin(t - \frac{2\pi}{3})) - 7f(2\cos^2 t + \frac{1}{2}) = 72t^2 - \pi^2. \end{cases}$$

Найдите $f(2)$. Численный ответ при необходимости округлите до десятых долей после запятой включительно.

Ответ: $5\pi^2$, что округляется до числа 49,3.

5. Палиндромом называется число, которое читается одинаково и слева направо, и справа налево. Например, сумма всех делителей (включая единицу и само число) числа 2021 — число 2112 — является палиндромом. Найдите такое двузначное число, что сумма всех его делителей — двузначный палиндром.

Ответ: 43

6. Вершины P и Q квадрата $PQRS$ лежат на стороне AB треугольника ABC , вершина R лежит на стороне BC , вершина S лежит на стороне AC . Описанная вокруг квадрата $PQRS$ окружность касается прямой CB и пересекает отрезок AS в точке T . Площадь треугольника BRQ равна 8, отрезок AT равен $\frac{21}{5}$. Найдите длину отрезка AP .

Ответ: 3