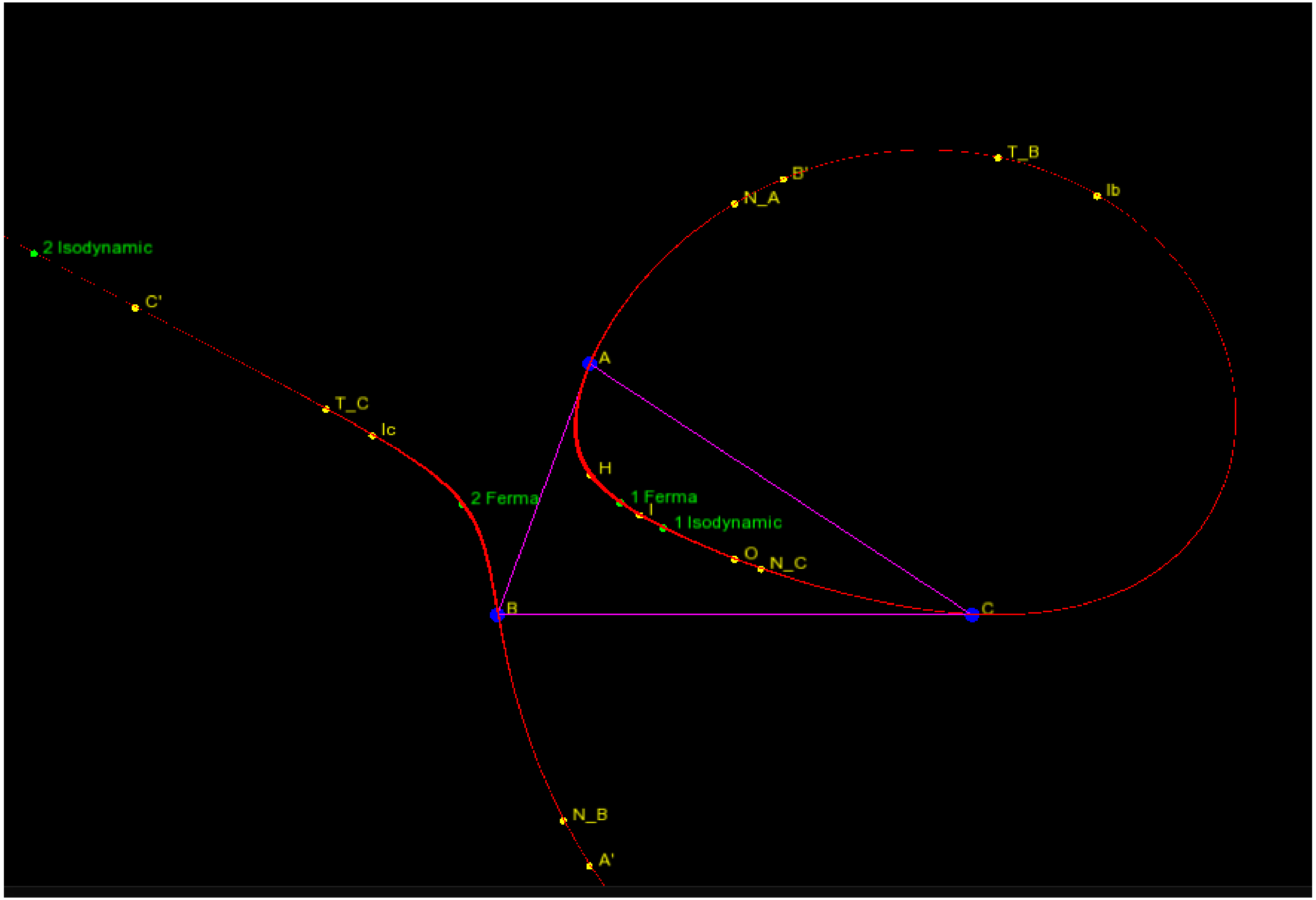
Кубические кривые, связанные с треугольником

Обзор свойств и примеры



Тетюхин Владимир 11Б

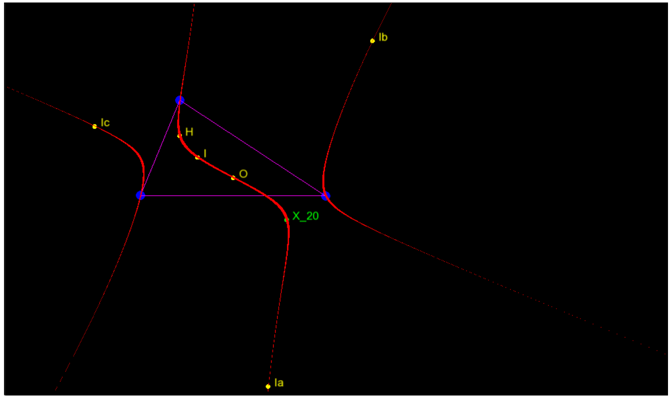
Кубические кривые, связанные с треугольником

Что это такое?
Каждому треугольнику можно разными способами сопоставить кубическую кривую (кубику), задаваемую уравнением $\sum_{i+j\le 3} a_{ij} x^i y^j = 0$

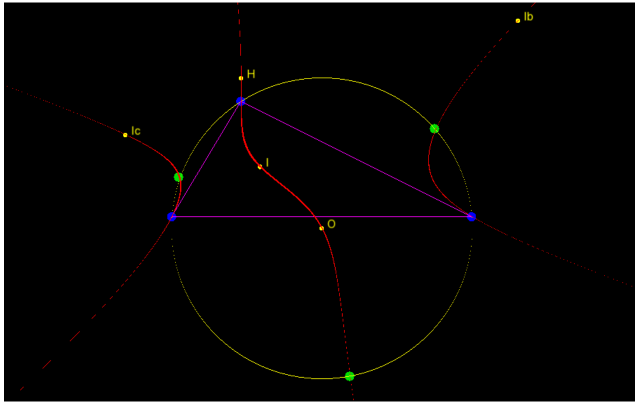
Что в них особенного?
Некоторые кубики обладают интересными геометрическими свойствами.

Например, кубика Нейберга является кривой, проходящей через 21 замечательную точку треугольника.

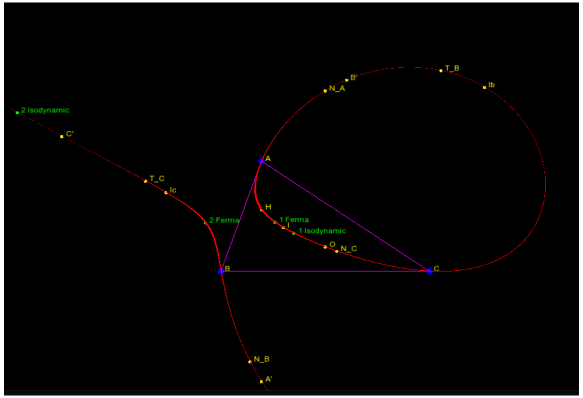
Кубика Дарбу



Кубика Мак-Кэя



Кубика Нейберга



План рассказа

- Вывод единого уравнения кубических кривых (кубик)
- Рассмотрение частных случаев кривых и их свойств
  - Кубика Дарбу
  - Кубика Мак-Кэя
  - Кубика Нейберга
- Динамическая визуализация кубических кривых

Вывод единого уравнения кубических кривых

Доказательство критерия коллинеарности

Теорема. Площадь △PQR с вершинами $P(a_p, b_p, c_p)$, $Q(a_q, b_q, c_q)$, $R(a_r, b_r, c_r)$, имеющие нормализованные барицентрические координаты, равна:

$$[PQR]=[ABC]\begin{vmatrix} a_p & b_p & c_p \\ a_q & b_q & c_q \\ a_r & b_r & c_r \end{vmatrix}$$

Доказательство. $[ABC]=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_b-x_a & x_c-x_a \\ y_b-y_a & y_c-y_a \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$

$$[ABC]\begin{vmatrix} a_p & b_p & c_p \\ a_q & b_q & c_q \\ a_r & b_r & c_r \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_p & b_p & c_p \\ a_q & b_q & c_q \\ a_r & b_r & c_r \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_p x_a+b_p x_b+c_p x_c & a_p y_a+b_p y_b+c_p y_c & a_p+b_p+c_p \\ a_q x_a+b_q x_b+c_q x_c & a_q y_a+b_q y_b+c_q y_c & a_q+b_q+c_q \\ a_r x_a+b_r x_b+c_r x_c & a_r y_a+b_r y_b+c_r y_c & a_r+b_r+c_r \end{vmatrix}$$

$$Так\ как\ \vec{OP}=a_p\vec{OA}+b_p\vec{OB}+c_p\vec{OC}\Rightarrow x_p=a_p x_a+b_p x_b+c_p x_c\ и\ y_p=a_p y_a+b_p y_b+c_p y_c,\ тогда$$

$$[ABC]\begin{vmatrix} a_p & b_p & c_p \\ a_q & b_q & c_q \\ a_r & b_r & c_r \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{vmatrix}=[PQR]$$

Следствие.: P, Q, R коллинеарны ⇔ $\begin{vmatrix} a_p & b_p & c_p \\ a_q & b_q & c_q \\ a_r & b_r & c_r \end{vmatrix}=0$

Вывод единого уравнения кубических кривых

Переход к трилинейным координатам

Запишем аналогичную формулу в трилинейных координатах.

Трилинейные координаты связаны с барицентрическими координатами.
Если (α, β, γ) = (△XBC, △XCA, △XAB) — барицентрические координаты точки P относительно △ABC, то трилинейные - $(x, y, z) = \left(\frac{\alpha}{a} : \frac{\beta}{b} : \frac{\gamma}{c}\right)$

P, Q, R коллинеарны ⇔ $0 = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a_p & b_p & c_p \\ a_q & b_q & c_q \\ a_r & b_r & c_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a_p}{a} & \frac{b_p}{b} & \frac{c_p}{c} \\ \frac{a_q}{a} & \frac{b_q}{b} & \frac{c_q}{c} \\ \frac{a_r}{a} & \frac{b_r}{b} & \frac{c_r}{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

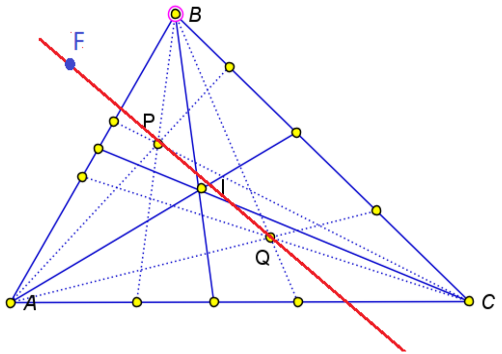
Вывод единого уравнения кубических кривых

- **Теорема**. Пусть на плоскости задана точка F. Для данного треугольника ABC рассмотрим всевозможные пары изогонально сопряжённых точек P и Q, для которых прямая PQ проходит через точку F. Тогда точки P и Q заметают кубическую кривую, которая проходит через вершины треугольника, через центры вписанной и трёх вневписанных окружностей I_a, I_b, I_c, а также через саму точку F.

Доказательство. Пусть $F(f_1, f_2, f_3)$, $P(x, y, z)$ — трилинейные координаты. Тогда Q, изогонально сопряженная с P, имеет координаты $(x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}) = (yz, zx, xy)$
Поэтому условие коллинеарности P, Q, F:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = 0$$

$$f_1 x(y^2 - z^2) + f_2 y(z^2 - x^2) + f_3 z(x^2 - y^2) = 0 \qquad (1)$$



Трилинейные координаты точек $F(f_1, f_2, f_3)$, A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1), I(1, 1, 1), $I_a(-1, 1, 1)$, $I_b(1, -1, 1)$, $I_c(1, 1, -1)$ удовлетворяют этому уравнению.

Точку F, с помощью которой строится кубическая кривая (1), будем называть центром вращения для этой кривой.

Кубика Дарбу

$$f_1 x(y^2 - z^2) + f_2 y(z^2 - x^2) + f_3 z(x^2 - y^2) = 0$$

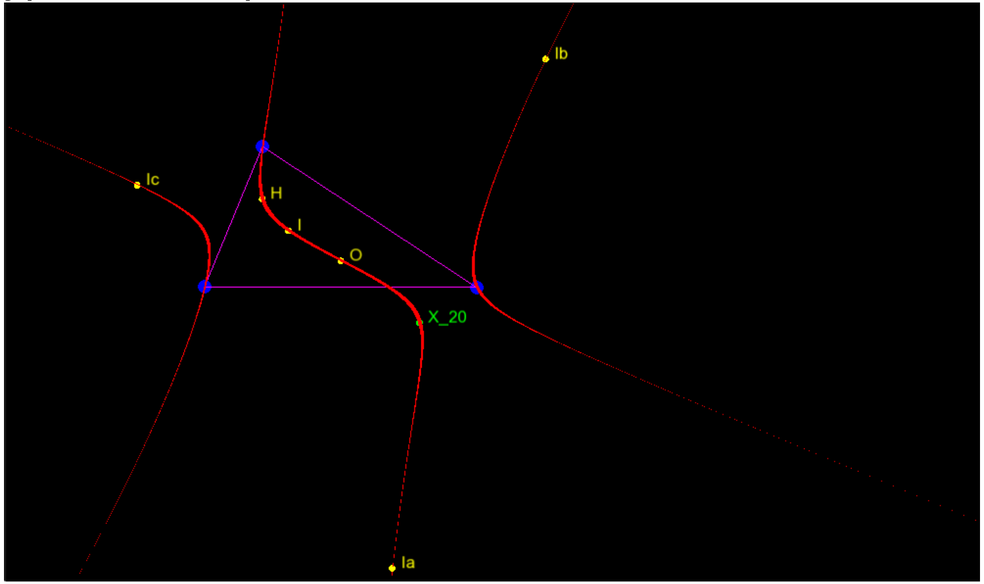
Определение

Центром вращения кубики Дарбу является точка X_{20} (de Longchamps point), симметричная ортоцентру относительно центра описанной окружности.

Точки O(cos α, cos β, cos γ), H(cos β cos γ, cos γ cos α, cos β cos α) лежат на кубике Дарбу,

X_{20} (cos α - cos β cos γ, cos β - cos γ cos α, cos γ - cos α cos β), тогда

$(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)x(y^2 - z^2) + (\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha)y(z^2 - x^2) + (\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta)z(x^2 - y^2) = 0$ — уравнение кривой.



Кубика Дарбу

Геометрическое описание

$$f_1 x(y^2-z^2)+f_2 y(z^2-x^2)+f_3 z(x^2-y^2)=0$$

Кубика Дарбу допускает следующее геометрическое описание.

Теорема. Пусть A', B', C' - проекции D на прямые BC, CA, AB. Точка D лежит на кубике Дарбу ⇔ AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

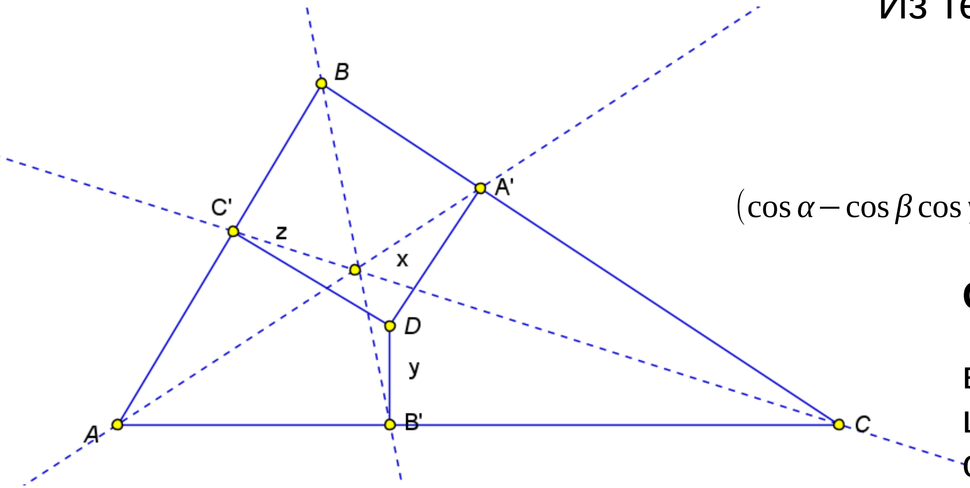
Доказательство. Пусть D(x, y, z) — нормированные трилинейные координаты. Найдем CA'.

$$\frac{B'C'}{\sin\alpha}=AD\Rightarrow\frac{y^2+z^2-2zy\cos(\pi-\alpha)}{z^2+AC'^2}=\sin^2\alpha\Rightarrow AC'=\frac{y+z\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Из теоремы Чевы: $\frac{AC'}{C'B}\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}=1$

$$\frac{y+z\cos\alpha}{z+y\cos\alpha}\frac{z+x\cos\beta}{x+z\cos\beta}\frac{x+y\cos\gamma}{y+x\cos\gamma}=1$$

$$(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)x(y^2-z^2)+(\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha)y(z^2-x^2)+(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)z(x^2-y^2)=0$$



Следствие. Так как если соотношение $\frac{AC'}{C'B}\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}=1$ выполняется для D', симметричной D относительно центра описанной окружности, то кубика симметрична относительно O.

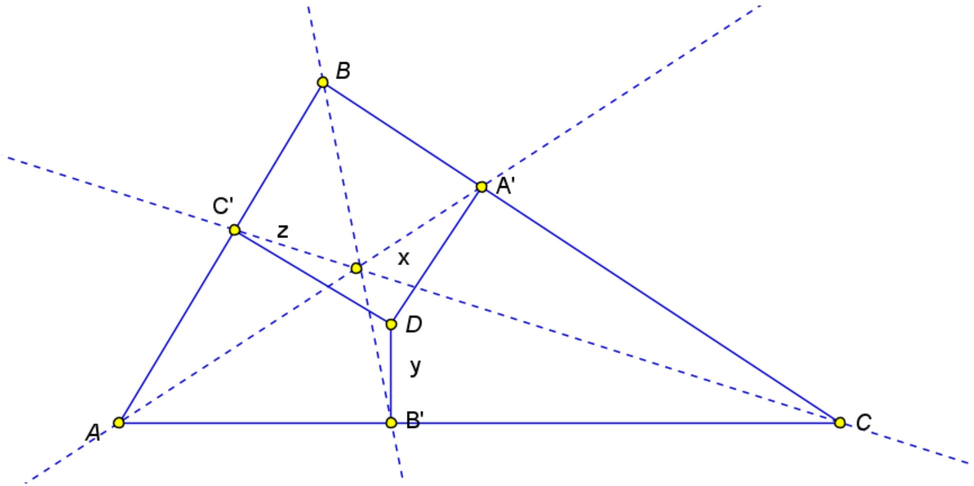
Кубика Дарбу

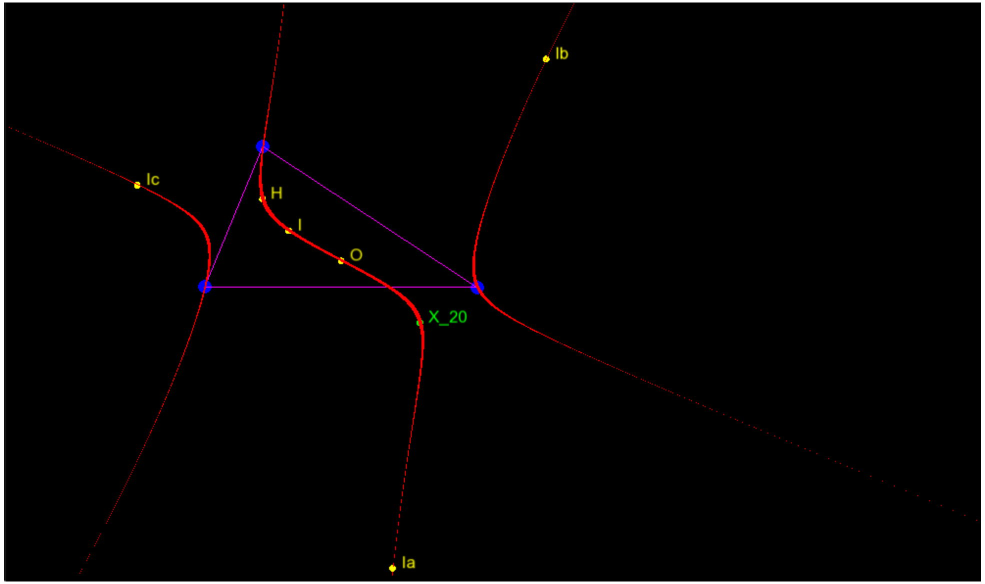
Свойства

Свойство 1. Так как если соотношение $\frac{AC'}{C'B}\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}=1$

выполняется для D', симметричной D относительно центра описанной окружности, то кубика симметрична относительно O.

Свойство 2. (Без доказательства) Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке ⇔ существует кривая второго порядка, касающаяся сторон треугольника (или их продолжений) в точках A_1, B_1, C_1.

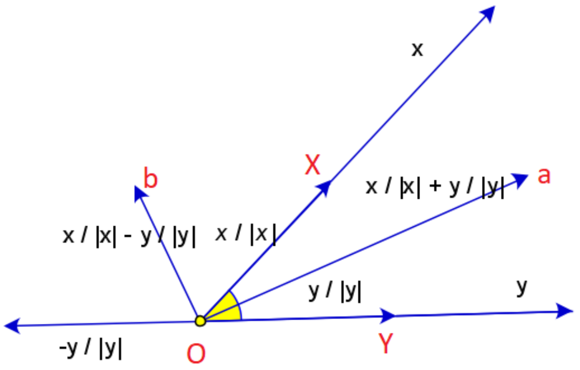




Кубика Мак-Кэя

Теорема Морли

Лемма. На комплексной плоскости a и b - биссектрисы внешнего и внутреннего углов между векторами z и w, c и d - биссектрисы внешнего и внутреннего углов между векторами x и y. Векторы a ‖ c, b ‖ d ⇔ $\frac{zw}{\bar{z}\,\bar{w}}=\frac{xy}{\bar{x}\,\bar{y}}$



Доказательсво.

$$a\|\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|},c\|\frac{z}{|z|}+\frac{w}{|w|}\Rightarrow\frac{z|w|+w|z|}{x|y|+y|x|}=\frac{\bar{z}|w|+\bar{w}|z|}{\bar{x}|y|+\bar{y}|x|}-\text{для внутренней биссектрисы}$$

$$b\|-\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|},d\|-\frac{z}{|z|}+\frac{w}{|w|}\Rightarrow\frac{-z|w|+w|z|}{-x|y|+y|x|}=\frac{-\bar{z}|w|+\bar{w}|z|}{-\bar{x}|y|+\bar{y}|x|}-\text{для внешней биссектрисы}$$

Из полученной системы следует $\frac{zw}{\bar{z}\,\bar{w}}=\frac{xy}{\bar{x}\,\bar{y}}$

Теорема Морли. Пусть вершины △ABC расположены в точках a, b, c единичной окружности на комплексной плоскости. Тогда изогонально сопряженные точки p и q относительно △ABC связаны соотношением: $p+q+abc\,\bar{p}\,\bar{q}=a+b+c$

Доказательство. Лучи AP и AQ симеетричны относительно биссектрисы ∠A. По теореме Морли:

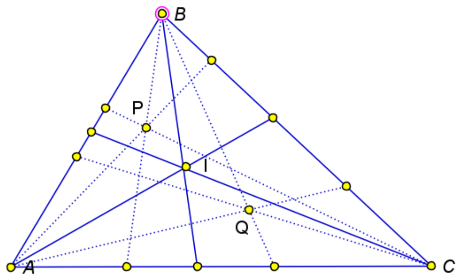
$$\frac{(p-a)(q-a)}{(\bar{p}-\bar{a})(\bar{q}-\bar{a})}=\frac{(b-a)(c-a)}{(\bar{b}-\bar{a})(\bar{c}-\bar{a})}\Rightarrow\frac{(p-a)(q-a)}{(\bar{p}-\frac{1}{a})(\bar{q}-\frac{1}{a})}=a^2bc$$

$$pq-a(p+q)+a^2=a^2bc\,\bar{p}\,\bar{q}-abc(\bar{p}+\bar{q})+bc$$

$$\text{Аналогично получаем}: pq-b(p+q)+b^2=b^2ac\,\bar{p}\,\bar{q}-abc(\bar{p}+\bar{q})+ac$$

$$(p+q-a-b)(a-b)=(-\bar{p}\,\bar{q}\,abc+c)(a-b)$$

$$p+q+abc\,\bar{p}\,\bar{q}=a+b+c$$



Кубика Мак-Кэя
Определение

$$f_1 x(y^2 - z^2) + f_2 y(z^2 - x^2) + f_3 z(x^2 - y^2) = 0$$

Центром вращения кубики является точка O(cos α, cos β, cos γ). Тогда

$\cos\alpha \cdot x(y^2 - z^2) + \cos\beta \cdot y(z^2 - x^2) + \cos\gamma \cdot z(x^2 - y^2) = 0$ — уравнение кривой.

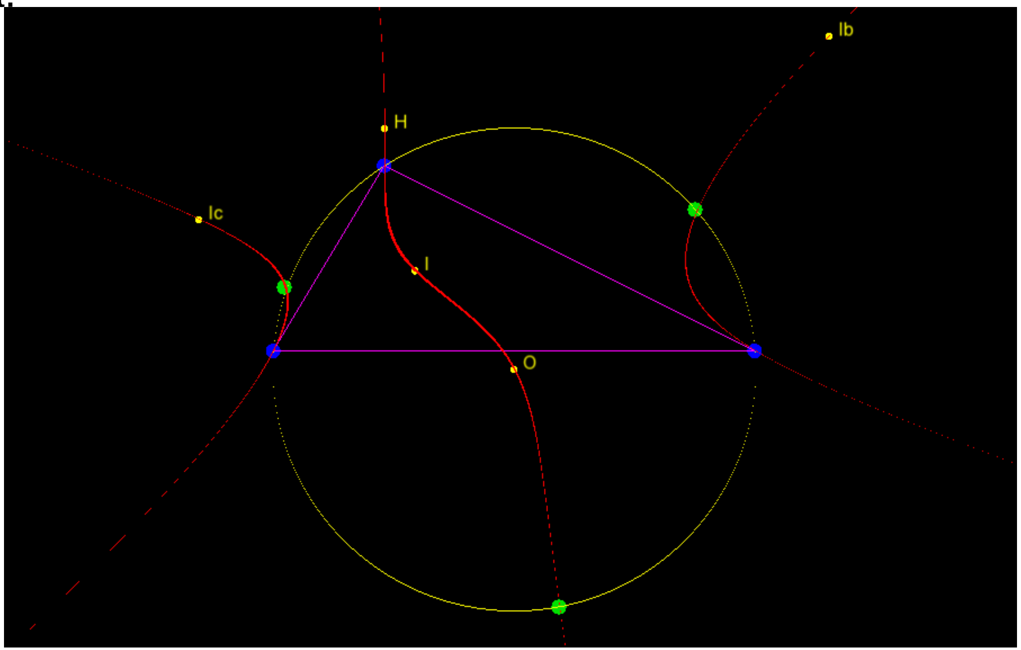
Теорема. Пусть вершины треугольника расположены в точках a, b, c единичной окружности на комплексной плоскости. Тогда $(z-a)(z-b)(z-c) = abc(a\bar{z}-1)(b\bar{z}-1)(c\bar{z}-1)$ - уравнение кубики Мак-Кэя.

Дозательство. Пусть точки z и w изогонально сопряжены относительно даннго треугольника. Тогда:

$$z + w + abc\,\bar{z}\,\bar{w} = a + b + c \, (1)$$
$$\bar{z} + \bar{w} + \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\, z\, w = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} \, (2)$$
$$\text{Умножим } (2) \text{ на } abc\,\bar{z} \text{ и вычтем из } (1):$$
$$abc\,\bar{z}\,\bar{w} + |a|^2|b|^2|c|^2|z|^2 w = abc\,\bar{z}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$$
$$w = \frac{a + b + c - z - abc\,\bar{z}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \bar{z})}{1 - |abcd|^2}$$

По определению кубики прямая zw проходит через O, т. е. через начало координат $\Rightarrow \frac{z}{\bar{z}} = \frac{w}{\bar{w}}$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a + b + c - z - abc\,\bar{z}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \bar{z})}{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \bar{z} - \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\, z(a + b + c - z)}$$
$$(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \bar{z})(z + abc\,\bar{z}^2) = (a + b + c - z)(\bar{z} + z^2 \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})$$
$$(ab + bc + ca - abc\,\bar{z})(z + abc\,\bar{z}^2) = (a + b + c - z)(abc\,\bar{z} + z^2)$$
$$(z-a)(z-b)(z-c) = abc(a\bar{z}-1)(b\bar{z}-1)(c\bar{z}-1)$$



Кубика Мак-Кэя
Свойства

$$f_1 x(y^2-z^2)+f_2 y(z^2-x^2)+f_3 z(x^2-y^2)=0$$

Найдем точки пересечения кубики с описанной окружностью отличные от вершин треугольника:

$$(z-a)(z-b)(z-c)=abc(a\bar{z}-1)(b\bar{z}-1)(c\bar{z}-1)$$

$$|z|^2=1 \Rightarrow \bar{z}=\frac{1}{z} \Rightarrow (z-a)(z-b)(z-c)=-z^{-3}abc(z-a)(z-b)(z-c) \Rightarrow z^3=-abc$$

Полученные точки являются вершинами правильного треугольника.

Теорема. Точка M лежит на кубике Мак-Кэя ⇔ $\angle MAB+\angle MBC+\angle MCA=\frac{\pi}{2}+\pi k$

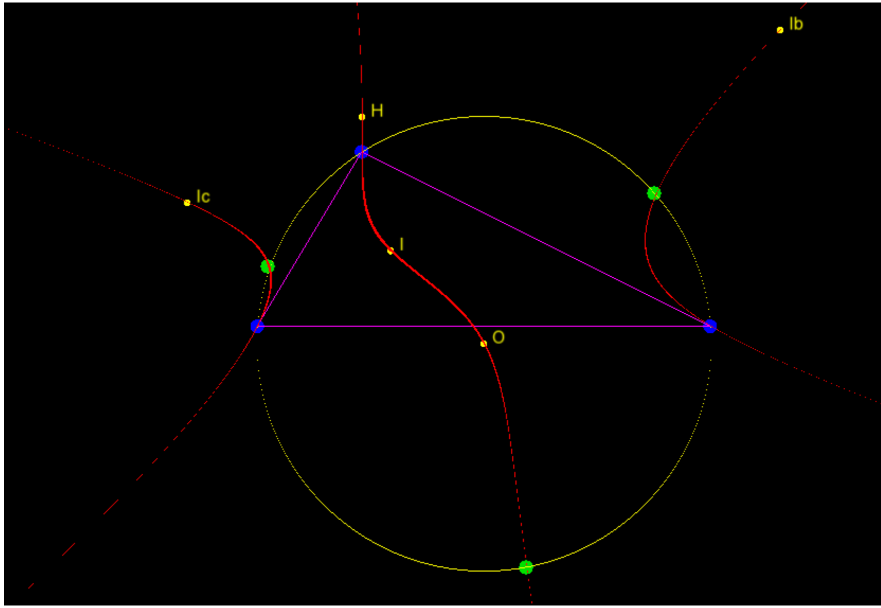
Пусть ∠MAB=α, ∠MBC=β, ∠MCA=γ.

$$\alpha=\arg\frac{b-a}{m-a}=\arg\frac{\frac{b-a}{|b-a|}}{\frac{m-a}{|m-a|}}$$

$$e^{2i\alpha}=\frac{b-a}{m-a}\,\frac{\bar{m}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}=-b\frac{a\bar{m}-1}{m-a}$$

$$\text{Поэтому } e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)}=-abc\frac{a\bar{m}-1}{m-a}\,\frac{b\bar{m}-1}{m-b}\,\frac{c\bar{m}-1}{m-c}$$

$$\text{Следовательно, } M \text{ лежит на кубике} \Leftrightarrow e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)}=-1 \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}+\pi k$$



Свойство. (Без доказательства) Описанная окружность треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров, опущенных из любой точки кубики на стороны △ABC, касается окружности девяти точек △ABC.

Кубика Нейберга

Определение

$$f_1 x(y^2-z^2)+f_2 y(z^2-x^2)+f_3 z(x^2-y^2)=0$$

Центром вращения для этой кривой служит бесконечно удаленная точка прямой OH — X_{30} (Euler Infinity point). Другими словами, кубика состоит из таких пар изогонально сопряженных точек P и Q, что прямая PQ ∥ OH.

$$X_{30}(\cos\alpha-2\cos\beta\cos\gamma,\cos\beta-2\cos\gamma\cos\alpha,\cos\gamma-2\cos\alpha\cos\beta),$$

$$(\cos\alpha-2\cos\beta\cos\gamma)x(y^2-z^2)+\ldots=0-\textit{уравнение кривой}$$

$$\textit{Данные точки принадлежат кривой}:$$

$$I(1,1,1),I_a(-1;1;1),I_b(1;-1;1),I_c(1;1;-1)$$

$$O(\cos A,\cos B,\cos C),H(\sec A,\sec B,\sec C)$$

$$X_{13}(\csc(A+\frac{\pi}{3}),\csc(B+\frac{\pi}{3}),\csc(C+\frac{\pi}{3}))-1\,\textit{точка Ферма}$$

$$X_{14}(\csc(A-\frac{\pi}{3}),\csc(B-\frac{\pi}{3}),\csc(C-\frac{\pi}{3}))-2\,\textit{точка Ферма}$$

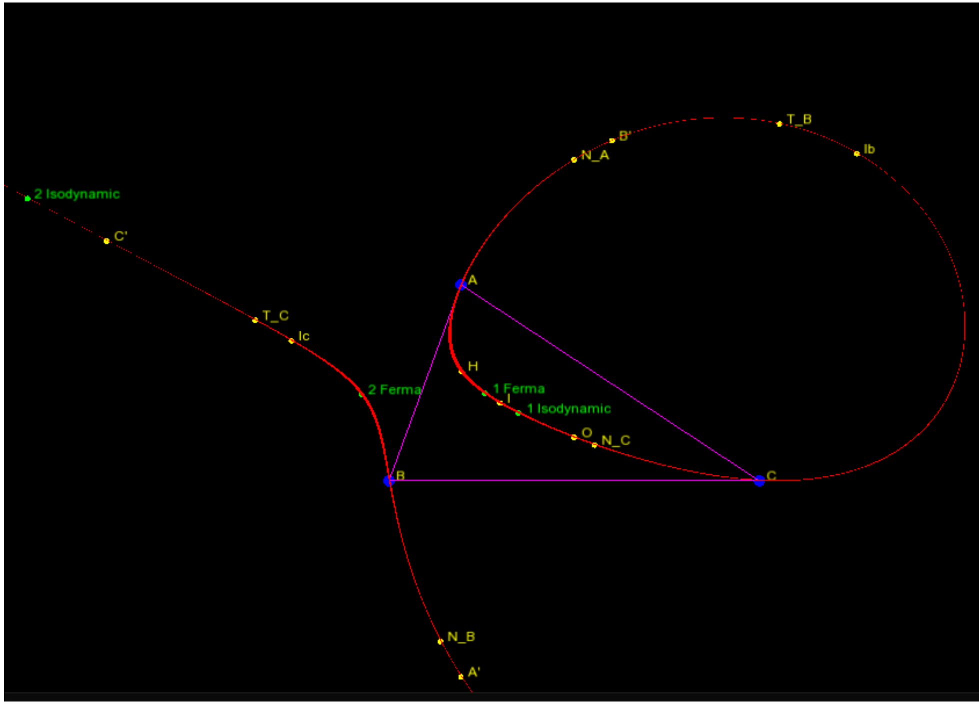
$$X_{15}(\sin(A+\frac{\pi}{3}),\sin(B+\frac{\pi}{3}),\sin(C+\frac{\pi}{3}))-1\,\textit{точка Аполлония}$$

$$X_{16}(\sin(A-\frac{\pi}{3}),\sin(B-\frac{\pi}{3}),\sin(C-\frac{\pi}{3}))-2\,\textit{точка Аполлония}$$

$$\textit{Вершины правильных треугольников постоенных}$$

$$\textit{внешним образом}-T_a(-a\frac{\sqrt{3}}{2},c\sin(\beta+60°),b\sin(\gamma+60°)),T_b,T_c$$

$$\textit{внутренним образом}-N_a(a\frac{\sqrt{3}}{2},c\sin(\beta-60°),b\sin(\gamma-60°)),N_b,N_c,$$



$$\textit{точки, симметричные вершинам}\triangle ABC\textit{ относительно его сторон},$$

$$X_{74}((\cos\alpha-2\cos\beta\cos\gamma)^{-1},(\cos\beta-2\cos\gamma\cos\alpha)^{-1},(\cos\gamma-2\cos\alpha\cos\beta)^{-1})$$

Литература

- https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html - Энциклопедия центров треугольника
- https://bernard-gibert.pagesperso-orange.fr/index.html - Энциклопедия кубических кривых, связанных с треугольником
- Прасолов В. В. Задачи по планиметрии
- Barycentric Coordinates for the Impatient Max Schindler Evan Cheny