<u>План</u>

1). Опр группы

- $(G, \cdot)$
- ассоциативность
- единица
- обратный эл-т

Примеры:

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_m$, S_3, D_4

Клячко А.А
(лекц 13, 14)а

2). <u>Граф</u> (ориентированный граф – это четвёрка

$\Gamma = (V, E, \alpha, \omega)$

V - мн-во вершин

E - мн-во рёбер

$\alpha: E \longrightarrow V$ $\alpha(e)$ - начало ребра

$\omega: E \longrightarrow V$ $\omega(e)$ - конец ребра

<u>Раскраска графа</u> - произвольное отображение

$\lambda: E(\Gamma) \longrightarrow X$, где X - мн-во цветов.

<u>Подграф графа Γ</u> - пара мн-в $(V' \subseteq V, E' \subseteq E)$ т.ч. начало и конец всякого ребра из E' лежит в V'.

Морфизм $f: \Gamma_1 \to \Gamma_2$

$$f_V: V(\Gamma_1) \to V(\Gamma_2) \qquad \text{т.ч.} \quad f_V(\alpha(e)) = \alpha f_E(e)) \qquad \forall e \in E.$$
$$f_E: E(\Gamma_1) \to E(\Gamma_2) \qquad \text{и} \quad f_V(\omega(e)) = \omega(f_E(e))$$

Если речь о морфизмах раскрашенных графов, то ещё сохраняется цвет.

$\mathrm{Aut}\,\Gamma$ - группа относительно умножения.

<u>Кратность вершины</u> - число инцидентных ей рёбер.

<u>Граф локально конечен</u>, если кратность каждой его вершины конечна.

$\overset{n}{\underbrace{\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet}}_{\text{отрезок длины } n}$

Путь в графе - морфизм $f: I \longrightarrow \Gamma$

<u>Длина пути</u> - длина I

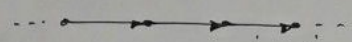
Путь замкнут, если начало и конец совпадают.
(цикл, петля)

Порождающие мн-ва

Мн-во элементов группы, перемножая которые можно получить все остальные

Пр

$\mathbb{Z} = \langle (1) \rangle$

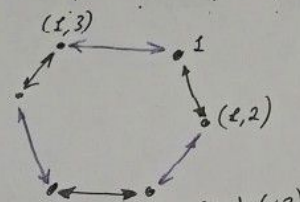


$\mathbb{Z}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$

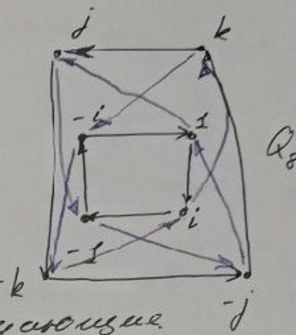
$S_3 = \langle (123), (12) \rangle$

$Q_8 = \langle i, j \rangle$

$D_4 = \langle S_{e_1}, R_{\frac{\pi}{2}} \rangle$



$Cay(S_3, \{(12), (13)\})$



Q_8

Граф Кэли

Пусть есть группа G

Зафикс. некоторое мн-во X - порождающие

Построим граф (раскрашенный)

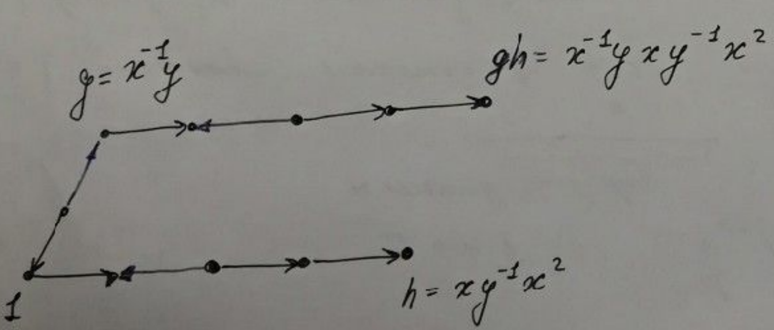
$V = \{g \in G\}$

g, h соединим ребром цвета $x \in X$

$g \longrightarrow h \iff gx = h$

Полученный граф - граф Кэли группы G отн. мн-ва порождающих X. $Cay(G, X)$

Чтобы умножить эл-ты g и h группы G, надо взять путь $f: I \longrightarrow Cay(G, X)$ с началом в ~~g~~ 1 и концом в вершине h и рассмотреть путь $f': I \longrightarrow Cay(G, X)$ с началом в точке g.



Св-ва графа Кэли

1). Граф Кэли связен

▸ X - порождающие ◂

$\rho(g,h) = \|g^{-1}h\| \stackrel{def}{=} \min(n \mid g^{-1}h = x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\varepsilon_n},\ x_i \in X,\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\})$

ρ - словарная метрика в группе G (отн системы порождающих X)

2). Граф Кэли является правильно раскрашенным в том смысле, что из каждой вершины выходит и в каждую вершину входит ровно одно ребро каждого цвета.

▸ $\forall g \in G\ \forall x \in X\ \exists!\ g_1$ и g_2 т.ч. $gx = g_1$ и $g_2 x = g$ ◂

3). $\forall$ вершин a и b правильно раскрашенного связного графа $\exists$ не более одного автоморфизма этого графа, переводящего вершину a в вершину b.

▸ Достаточно д-ть, что не тождественный автоморфизм не может оставлять на месте ни одну вершину. Рёбра, смежные с неподвижной вершиной, сами остаются неподвижными (из правильности раскраски) $\Rightarrow$ соседние вершины неподвижны $\Rightarrow$ все вершины и все рёбра неподвижны (из связности) ◂

4) Граф Кэли является однородным.

$Aut(Cay(G)) \circlearrowright V(G)$ транзитивно ($\forall b\ \forall$)

▸ $\forall g \in G\ \exists \varphi_g \in Aut(Cay(G))\quad \varphi_g: 1 \longmapsto g$

φ_g - умножение слева на эл-т g.

$\varphi_g(h) = gh$ ◂

Теор $Aut\, Cay(G,X) \simeq G$

▸ $g \longmapsto \varphi_g$ ◂

1) $\rho(x,y) \geq 0$

2) $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$

3) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

4) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

$\Bigg\}$ – метрика

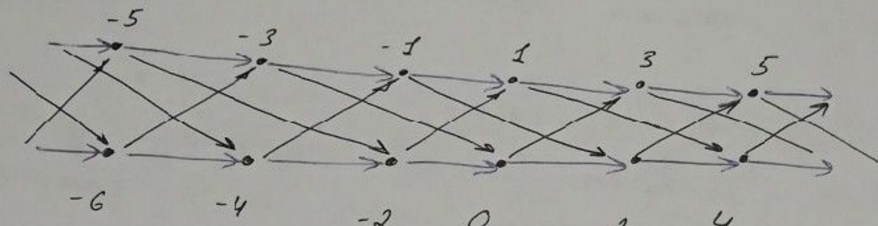
f - изометрия, если

1) $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) = \rho_X(x_1, x_2)$

2) ~~ρ~~ f сюръективно

или $\exists$ ~~f~~ $g = f^{-1}$

$Z = \{3, 2\}$



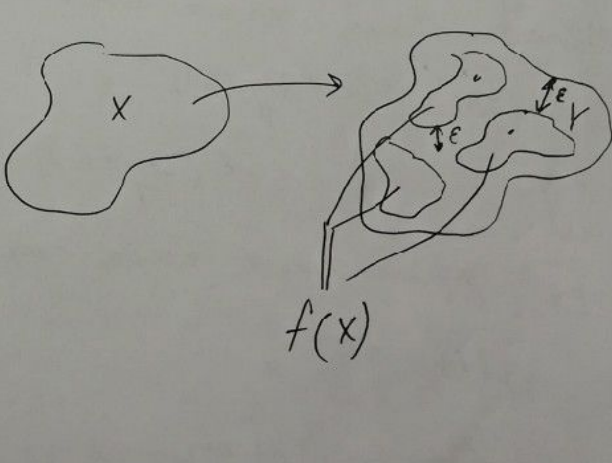
Опр

$f: X \to Y$ из одного метрического пр-ва в другое **квазиизометрично**, если $\exists\, C_1, C_2, C_3, C_4$ т. ч.

$$C_1 \rho(x_1, x_2) - C_2 \leq \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq C_3 \rho(x_1, x_2) + C_4 \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

Квазиизометричное отображение f называют **квазиизометрией**, если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

а) f „почти сюръективно" в том смысле, что $\exists\, \varepsilon$ т. ч. $\forall y \in Y$ лежит на расстоянии не более ε от некоторой точки образа отобр f



б) $\exists$ квазиизометричное отображение $g: Y \to X$, почти обратное к f, т. е. т. ч. $\rho(f(g(y)), y) \leq D_1$ и

$\rho(g(f(x)), x) \leq D_2$

для нек D_1 и D_2 $\forall\, x \in X, y \in Y$

Утв Если X и Y - два конечных порождающих мн-ва группы G, то графы Кэли $Cay(G,X)$ и $Cay(G,Y)$ квазиизометричны.

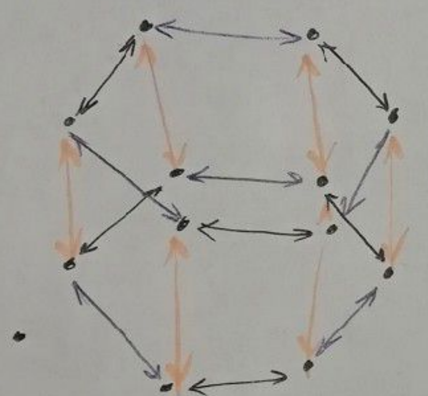
▸ $\rho_X(g,h) = \|g^{-1}h\|_X \overset{def}{=} \min(n \mid g^{-1}h = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, где $x_i \in X$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}) \leq$

$\leq M \cdot \min(m \mid g^{-1}h = y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}$, где $y_i \in Y$, $\delta_i \in \{\pm 1\}) = M\rho_Y(g,h)$

где $M = \max(\|y\|_X ;\ y \in Y)$.

Наоборот: $\rho_Y(g,h) \leq N\rho_X(g,h)$, где $N = \max(\|x\|_Y ;\ x \in X)$ ◂

Прямое произведение групп



$S_3 \times \mathbb{Z}_2 = \langle ((1,2),0),\ ((1,3),0)\ (e,1) \rangle$

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$

$(a,b)\cdot(a',b') = (aa', bb')$

Единица: (e_A, e_B)

Обр эл-т: $(a,b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$