



**Задача 1** В термодинамическом процессе рабочим телом является один моль одноатомного идеального газа, его давление  $p$  и объем  $V$  связаны соотношением

$$p = p_0 \left(1 - \frac{V}{V_0}\right),$$

где  $p_0, V_0$  — некоторые константы. Газ медленно расширяется. Дайте обоснованные ответы на следующие вопросы:

- А. Увеличивается или уменьшается температура газа в тот момент, когда  $V = 9V_0/16$ ?
- Б. Сообщается ли в этот момент газу тепло или оно отбирается у него?

**Решение.** Согласно уравнению состояния идеального газа температура  $T$  связана с давлением и объемом соотношением (количество вещества 1 моль):

$$pV = RT,$$

откуда

$$T = \frac{pV}{R} = \frac{p_0V}{R} \left(1 - \frac{V}{V_0}\right) = \frac{p_0V_0}{R} x(1-x), \quad x = \frac{V}{V_0}.$$

Температура возрастает, пока  $x < 1/2$ , значит при заданном значении объема  $x = 9/16$  температура убывает.

Для определения направления теплопередачи рассмотрим первое начало термодинамики для малого приращения объема  $\Delta V = V_0\Delta x$ . Переданное газу тепло

$$\Delta Q = p\Delta V + c_v\Delta T,$$

где  $c_v = 3R/2$  (газ одноатомный), приращение температуры (слагаемые порядка  $\Delta x^2$  отброшены)

$$\Delta T = \frac{p_0V_0}{R} [\Delta x - \Delta(x^2)] = \frac{p_0V_0}{R} \Delta x (1 - 2x).$$

Из первого начала термодинамики

$$\Delta Q = p_0V_0(1-x)\Delta x + \frac{c_v}{R}p_0V_0\Delta x(1-2x) = p_0V_0\Delta x \left[1 + \frac{c_v}{R} - x\left(1 + 2\frac{c_v}{R}\right)\right]$$

Так как  $\Delta x > 0$  (газ расширяется), знак теплоподвода определяется множителем в скобке. Тепло подводится ( $\Delta Q > 0$ ), если

$$x < \frac{1 + c_v/R}{1 + 2c_v/R} = \frac{5}{8}$$

Для заданного значения  $x$  это условие выполняется, значит тепло подводится.

**Ответ** Температура понижается, тепло подводится.

**Задача 2** В городе М действует ограничение скорости движения автомобилей 80 км/ч, причем все водители его неукоснительно соблюдают. Также в городе М много пробок на дорогах, так что средняя поездка протяженностью 30 км занимает 45 минут. Оцените как можно точнее сверху изменение продолжительности средней поездки, если длина маршрута и время, затраченное на пробки,

не изменятся, а ограничение скорости составит 50 км/ч? Превышение разрешенной скорости недопустимо. Ответ дайте в процентах от исходного значения продолжительности поездки.

**Решение** Средняя скорость движения до изменения скоростного режима  $30/0.75=40$  км/ч, так что для тех, кто не стоит в пробках, ничего не изменится. Понятно, что сильнее всего изменение скажется на таком режиме движения, когда автомобиль либо движется с максимально разрешенной скоростью, либо неподвижно стоит в пробке.

Найдем время в пробке:

$$\tau = T_1 - \frac{L}{V_1},$$

$L$  — длина маршрута,  $V_1$  и  $T_1$  — максимальная скорость и время поездки до изменений.

После изменений время поездки составит ( $V_2$  и  $T_2$  — максимальная скорость и время поездки в этом случае)

$$T_2 = \frac{L}{V_2} + \tau = T_1 + \frac{L}{V_2} - \frac{L}{V_1}$$

Относительное изменение:

$$\varepsilon = \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{L(V_2 - V_1)}{T_1 V_1 V_2} = 30\%$$

**Ответ:** 30%.

**Задача 3** По информации СМИ 3 июля 2020 года произошла внеплановая корректировка орбиты Международной космической станции (МКС), в результате чего скорость станции изменилась на 0,5 м/с, а радиус орбиты увеличился на 900 м.

А. Используя эти данные, а также радиус Земли (6400 км) и ускорение свободного падения на земной поверхности (9,8 м/с<sup>2</sup>), оцените высоту орбиты МКС над поверхностью Земли.

Б. С какой точностью (в метрах) должно быть измерено изменение радиуса орбиты, чтобы ошибка определения высоты орбиты над поверхностью Земли не превышала 100 км?

**Решение** Будем считать, что орбита МКС круговая, как до корректировки, так и после нее. Центробежное ускорение создается силой тяжести:

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{mM}{R^2},$$

где  $m, M$  — массы станции и Земли,  $G$  — гравитационная постоянная,  $v$  — скорость станции,  $R$  — радиус орбиты. Для орбиты на высоте  $d$  над поверхностью Земли имеем

$$\frac{mv^2}{R_0 + d} = mg \frac{R_0^2}{(R_0 + d)^2}, \quad (1)$$

$R_0$  — радиус Земли,  $g = GM/R_0^2$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли. Таким образом,

$$v^2 = \frac{gR_0^2}{R_0 + d}.$$

запишем это соотношение для двух ситуаций: 1) до корректировки  $d = H$ ,  $v = v_0$ , 2) после корректировки  $d = H + h$ ,  $v = v_0 + \Delta v$ .

$$v_0^2 = \frac{gR_0^2}{R_0 + H}, \quad (v_0 + \Delta v)^2 = \frac{gR_0^2}{R_0 + H + h} = \frac{gR_0^2}{R_0 + H} \left(1 + \frac{h}{R_0 + H}\right)^{-1}$$

Так как  $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$  при  $x \ll 1$ , а  $|\Delta v| \ll v_0$ ,  $h \ll (R_0 + H)$ , из этих соотношений получаем

$$2v_0 \Delta v = -\frac{gR_0^2}{(R_0 + H)^2} h \quad (2)$$

Таким образом очевидно, что  $\Delta v < 0$ . По условию имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{v_0(R_0+H)^2}{gR_0^2} &= -\frac{1}{2} \frac{h}{\Delta v_0} \\ v_0^2 &= \frac{gR_0^2}{R_0+H}, \end{aligned}$$

решая которую находим

$$H = R_0 \left[ \left( \frac{g}{4R_0} \right)^{1/3} \cdot \left( \frac{h^2}{(\Delta v)^2} \right)^{1/3} - 1 \right] = 476 \text{ км.} \quad (3)$$

При выводе формулы (2) величина отброшенных слагаемых порядка  $(\Delta v/v_0)^2 \sim 10^{-8}$  и  $(h/R_0)^2 \sim 10^{-7}$ , так что использованные приближения вносят незначительный вклад в погрешность определения  $H$ . Для того, чтобы найти требуемую точность, аппроксимируем зависимость (3) линейным соотношением, вычислив производную (полагаем, что все величины, кроме  $h$  известны точно и фиксированы):

$$\frac{dH}{dh} = \frac{2}{3} \left( \frac{g}{4(\Delta v)^2} \right)^{1/3} R_0^{2/3} h^{-1/3} \approx 5100.$$

Изменение значения  $h$  на  $\Delta h$  приводит к изменению  $H$  на  $\Delta H$ :

$$\Delta H = \frac{dH}{dh} \Delta h \approx 5100 \Delta h.$$

Ошибка  $\Delta H = 100$  км соответствует  $\Delta h = 10^5/5100 \approx 19.5$  м.

*Замечание* Ответ, полученный в первом пункте завышенный, орбита МКС лежит в пределах от 320 до 420 км, однако ответ на второй пункт проясняет низкую точность первого ответа: большая ошибка могла возникнуть из-за округления при написании новости в СМИ.

**Ответ:** 476 км; 19.5 м.