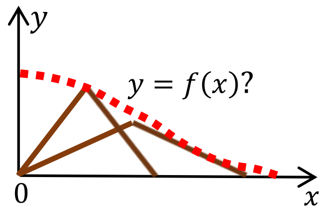
Олимпиада «Математическая реальность» (ОМаР)
Старшая лига. 23.11.2020

Задача 3

Складная дверь-книжка состоит из двух подвижно соединённых половинок (см. верхний рисунок). Одна её половинка вращается вокруг неподвижной оси, как обычная дверь, а противоположный конец другой половинки движется по неподвижному полозу. Сверху эти две половинки схематически выглядят, как два отрезка длины 1 каждый (см. нижний рисунок), ось двери находится в начале координат, а полоз совпадает с положительной полуосью абсцисс.



Фигура, которую заполняет (заметает) эта пара отрезков на координатной плоскости, ограничена осями координат и графиком некоторой функции. *Предположим*, что этот график составлен из двух дуг: левой и правой — они лежат на кривых, задаваемых соответственно уравнениями

$$x^\alpha + y^\alpha = \beta,\ \ 0 \le x \le x_0, \qquad \text{и} \qquad x^\gamma + y^\gamma = \delta,\ \ x_0 \le x \le 2,$$

при некоторых конкретных значениях $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ и $x_0 \in (0; 2)$.

А. Найдите значения α и β.

Б. При каком значении x_0 происходит переход с левой дуги на правую?

В. Найдите значения γ и δ.

Г. Верно ли сделанное выше предположение?

Ответ: **А.** $\alpha = 2,\ \beta = 1$. **Б.** $x_0 = 1/\sqrt{2}$. **В.** $\gamma = 2/3,\ \delta = \sqrt[3]{4}$. **Г.** Да.

Решение. Обозначим через φ угол, который левая половинка двери составляет с осью абсцисс.

А. Левая дуга образуется поворотом левой половинки (двери), которая описывает четверть круга, ограниченную кривой $x^2 + y^2 = 1$, так как при значениях φ, близких к $90°$, правая половинка лежит внутри круга и роли не играет. Поэтому $\alpha = 2,\ \beta = 1$.

Б. Когда угол φ равен $\varphi_0 \equiv 45°$, правая половинка лежит на касательной (в точке с координатами $x_0 = y_0 = 1/\sqrt{2}$) к кругу и целиком выходит за его пределы. Если $\varphi < \varphi_0$, то правая половинка тем более выходит наружу, а если $\varphi > \varphi_0$, то она, высекая на окружности дугу

$$2(2\varphi - 90°) = 4(\varphi - \varphi_0) > \varphi - \varphi_0,$$

пересекает её ниже упомянутой точки касания, а значит, выйдя из круга, она проходит ниже упомянутой касательной.

В. Подставляя крайние точки (x_0, y_0) и $(2, 0)$ в уравнение правой кривой, получаем

$$1/\sqrt{2}^\gamma + 1/\sqrt{2}^\gamma = \delta = 2^\gamma \ \Rightarrow\ \gamma = 2/3,\ \ \delta = \sqrt[3]{4}.$$

Г. Найденная кривая действительно удовлетворяет условию задачи (поэтому высказанное предположение оказывается верным), поскольку левая её часть найдена непосредственно, а для правой части выполнены следующие условия:

1) семейство прямых, на которых лежат задающие правую часть кривой правые половинки, записывается в виде

$$\frac{x}{\cos\varphi}+\frac{y}{\sin\varphi}=2,\qquad \varphi_0\geq\varphi\geq 0;$$

2) продифференцировав по x тождество, задающее правую часть кривой, и считая в нём y функцией от x, получим

$$\gamma x^{\gamma-1}+\gamma y^{\gamma-1}y'=0\ \Rightarrow y'=-(y/x)^{1-\gamma}=-(y/x)^{1/3}<0,\qquad x_0\leq x\leq 2,\qquad y_0\geq y\geq 0,$$

откуда выводится, что функция y убывает, а значит, её производная y' возрастает, и сама кривая выпукла вниз, то есть она лежит выше любой своей касательной;

3) если данная точка (x,y) принадлежит правой части кривой, то угловой коэффициент касательной к ней в данной точке равен $-k=-(y/x)^{1/3}$, а тогда прямая из нашего семейства с тем же угловым коэффициентом $-k=-\operatorname{tg}\varphi$ пройдет как раз через данную точку, так как

$$\frac{x}{\cos\varphi}+\frac{y}{\sin\varphi}=\frac{x}{1/\sqrt{1+k^2}}+\frac{y}{k/\sqrt{1+k^2}}=x^{\gamma}\sqrt{x^{\gamma}+y^{\gamma}}+y^{\gamma}\sqrt{x^{\gamma}+y^{\gamma}}=(2^{\gamma})^{3/2}=2,$$

а значит, она касается кривой в данной точке;

4) таким образом, множество всех касательных к этой части кривой совпадает с множеством соответствующих положений правой половинки, поэтому ни одна точка выше кривой правой половинкой не заметается, а все точки, лежащие на самой кривой и ниже неё, заметаются.