Олимпиада «Математическая реальность» (ОМаР)
Старшая лига. 23.11.2020

Задача 2

В кабинете химии после урока осталась колба с кислотой и мензурка с чистой водой. Учитель опорожнил колбу и собирается промыть её водой из мензурки. Для этого он планирует разделить всю воду в мензурке на n порций, не обязательно равных друг другу, и тщательно прополоскать колбу каждой порцией воды в отдельности: сначала первой, затем второй и т.д. Известно, что после каждого опорожнения колбы на её стенках остаётся некоторое, причём одно и то же, количество жидкости.

А. При каком из следующих четырёх значений n: 1, 2, 3 или 4 — после мытья n равными порциями воды колба в итоге станет чище (то есть в ней останется меньше кислоты)?

Б. В каком именно отношении лучше разделить воду в мензурке на $n = 3$ порции, чтобы колба в итоге стала наиболее чистой?

В. Верно ли, что чем больше число n равных порций, на которые делят воду, тем чище становится колба в итоге?

Г. Верно ли, что с ростом числа n равных порций количество кислоты, остающееся в колбе в итоге, стремится к нулю?

Ответ: **А.** 4. **Б.** На равные части. **В.** Да. **Г.** Нет.

Решение. Примем за единицу количество жидкости, остающееся на стенках колбы после её опорожнения. Тогда если в колбу влить x чистой воды, то концентрация кислоты, то есть её количество в единице раствора, уменьшится в $1 + x$ раз, а после опорожнения останется как раз единица этого раствора, содержащая $(1 + x)^{-1}$ кислоты.

А, В. Если исходное количество x воды разделить на $n(= 3)$ равных порций, то в конце получится $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$ кислоты, а если порций будет $n + 1$ — то $\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{-(n+1)}$. Для отношения первого количества ко второму (в силу неравенства Бернулли) получаем

$$\frac{n^n(n + 1 + x)^{n+1}}{(n + x)^n(n + 1)^{n+1}} = \frac{n + 1 + x}{n + 1}\left(1 - \frac{x}{n^2 + nx + n + x}\right)^n > \frac{n + 1 + x}{n + 1}\left(1 - \frac{nx}{n^2 + nx + n + x}\right)$$
$$= \frac{n + 1 + x}{n + 1} \cdot \frac{n^2 + n + x}{n^2 + nx + n + x} = \frac{n^3 + n^2(2 + x) + n(1 + 2x) + x + x^2}{n^3 + n^2(2 + x) + n(1 + 2x) + x} > 1,$$

поэтому с ростом числа n чистота колбы растёт.

Б. Если исходное количество x воды делят на n порций $x_1 + \dots + x_n = x$, то по теореме о средних итоговое количество кислоты допускает оценку снизу

$$\big((1 + x_1) \dots (1 + x_n)\big)^{-1} \geq \left(\frac{(1 + x_1) + \dots + (1 + x_n)}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n},$$

которая достигается как раз в случае равных порций $x_1 = \dots = x_n = x/n$.

Г. Если x фиксировано и $n \to +\infty$, то, обозначив $t \equiv n/x \to +\infty$, для наименьшего итогового количества кислоты с помощью второго замечательного предела получаем

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} = \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^{-x} \to e^{-x} > 0.$$