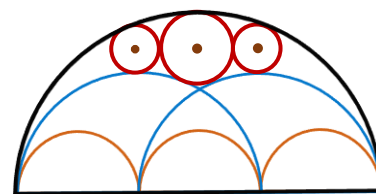


## Задача 1

В здании одесской филармонии в нижней части полукруглого окна (см. верхний рисунок) расположены три одинаковых полукруга поменьше и ещё два одинаковых полукруга побольше, а в оставшуюся верхнюю часть окна вписаны три круга (красные круги на нижнем рисунке).



А. Найдите отношение радиуса большего из трёх вписанных кругов к радиусу исходного полукруга (окна).

Б. Верно ли, что центры трёх вписанных кругов лежат на одной прямой?

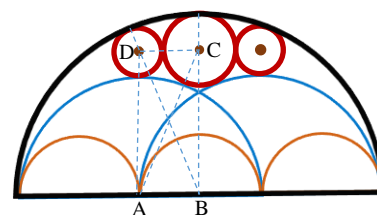
В. Каково отношение радиусов большего и меньшего из трёх вписанных кругов?

*Ответ:* А. 1 : 5. Б. Да. В. 3 : 2.

*Решение.* Обозначим радиус исходного полукруга (окна) через  $3a$ . Тогда радиусы меньшей и большей полуокружностей равны  $a$  и  $2a$  соответственно. Обозначим через  $r$  радиус большего из трёх кругов.

А. По теореме Пифагора для треугольника  $ABC$  (рис.) имеем  $a^2 + (3a - r)^2 = (2a + r)^2 \Rightarrow r = 3a/5$ .

Б (автор этого пункта задачи — Ю. Белецкий). Определив точку  $D$ , как недостающую вершину прямоугольника  $ABCD$ , и обозначив через  $x, y, z$  — расстояния от неё до большего круга (до ближайшей точки), до большей полуокружности и до исходной полуокружности соответственно, получим



$$\begin{aligned} a &= AB = CD = x + r, \\ 2a + y &= AD = BC = 3a - r, \\ 3a - z &= BD = AC = 2a + r. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$x = y = z = a - r.$$

поэтому точка  $D$  совпадает с центром малого круга, а значит, центры всех трёх кругов лежат на одной горизонтали.

В. Радиус меньшего круга равен

$$x = a - r = a - 3a/5 = 2a/5 = 2r/3.$$