XX КОЛМОГОРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

The 20th KOLMOGOROV READINGS

ADVANCED EDUCATION AND SCIENCE CENTER

Proceedings of
the 20th International Scientific Conference of students
Kolmogorov readings
May 5-8, 2020

MATHEMATICS

Moscow

2020

СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
(факультет) – школа-интернат имени А.Н. Колмогорова
Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

Материалы
XX Международной научной конференции школьников
«Колмогоровские чтения»
5-8 мая 2020

МАТЕМАТИКА

Москва
2020

Председатель организационного комитета

XX Международной научной конференции школьников

«Колмогоровские чтения»:

Директор СУНЦ МГУ К.В. Семенов

Редакционный совет сборника тезисов «Математика»:

И.Н. Сергеев (ответственный редактор), В.Н. Дубровский, Ю.В. Курышова (технический редактор)

Материалы

XX Международной научной конференции школьников

«Колмогоровские чтения»

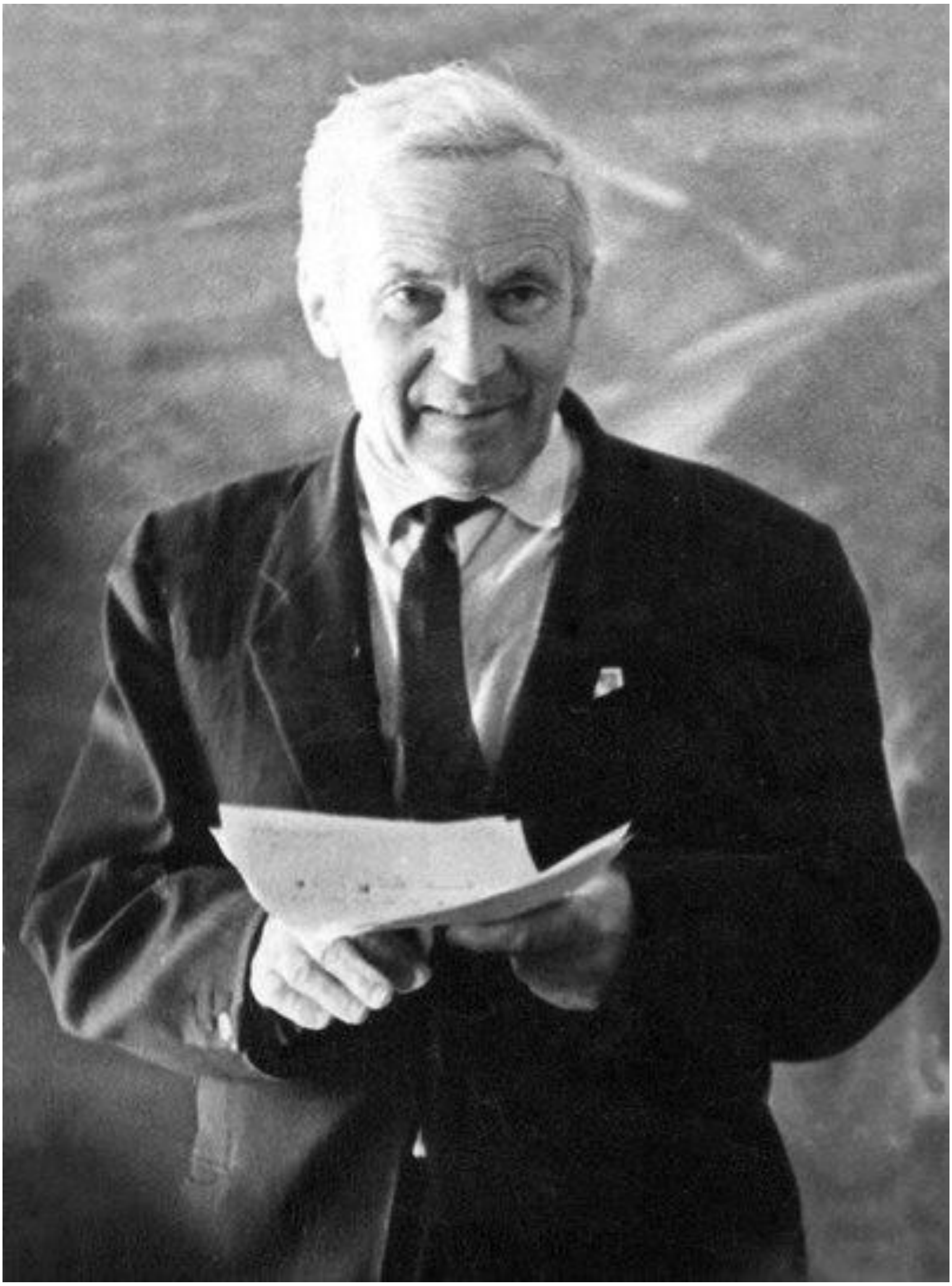
В настоящий сборник вошли тезисы приглашённых докладчиков

XX Международной научной конференции школьников

«Колмогоровские чтения» по секции

«Математика»

ISBN 978-5-87140-410-2



Как в спорте не сразу ставят рекорды, так и подготовка к настоящему научному творчеству требует тренировки.

А.Н. Колмогоров

Оглавление

IMPROVEMENT OF PRODUCT DISTRIBUTION EFFICIENCY USING DOUBLE-WEIGHTED FLOW NETWORK ON LEXICOGRAPHIC PRODUCT OF PATH GRAPH AND EMPTY GRAPH

Chayapol Chaoveeraprasit, Natchanont Sarathana, Tanakrit Kamonsumlitpon
Grade 11, Mahidol Wittayanusorn School, Thailand
Scientific advisor: Dr. Thammanoon Puirod

Flow Network is a model used to demonstrate distribution systems in order to find the highest amount of products that can be distributed. An interesting problem in graph theory is to find the algorithm for finding the maximum flow that a graph can send, in which each edge is weighted with nonnegative real numbers. However, the maximum efficiency for product distribution system cannot only be determined by the amount of flow but also the time used to send them.

We can also imitate «time» as another nonnegative real number weight on all the edges. This is similar to the shortest path problem in directed weighted graph. Both the shortest path and the maximum flow problem have already been solved. In our project, we focus simultaneously on both the «flow» and the «time» by weighting each edge with 2 nonnegative real numbers mimicking the maximum flow the edge can send and the time used to send on that edge. We define an «efficiency» to measure how well a particular flow pattern is, and to study about the conditions of the flows and weights to find the maximum efficiency flow on a lexicographic product of a path graph and an empty graph, which is the closest graph interpretation of real-life product distribution system.

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ГЛАДКИХ И МНОГОГРАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ИЗГИБАЕМЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Арутюнова Екатерина Юрьевна,
Епимов Данила Анатольевич, Мазуров Дмитрий Павлович
8 класс, МОУ лицей №14 им. М.М. Громова
Научный руководитель: уч. Физтех-лицея им. П.Л. Капицы Ю.А. Арутюнов

В работе решается ряд тополого-геометрических задач, связанных со свойствами гладких и многогранных поверхностей.

Поверхности в пространстве могут быть замкнутыми или незамкнутыми, т.е. ограничивающими или не ограничивающими объём. Другая классификация поверхностей даётся понятиями односторонности и двусторонности. Кроме того, многогранная поверхность может быть также изгибаемой или скручиваемой, а её форму можно изменять непрерывной деформацией. Такими примерами служат гладкие поверхности с топологией листа Мёбиуса и многогранные поверхности, в частности, ограничивающие многогранники.

Проведены следующие три экспериментальных исследования:

1) задача о результатах разрезания ленты Мёбиуса путём отступа от края на разные ширины;

2) задача о минимальном числе рёбер изгибаемой и скручиваемой многогранной поверхности;

3) задача об экспериментальной проверке теоремы о том, что при сгибании невыпуклого изгибаемого многогранника его объём не изменяется.

Методами этих исследований соответственно являлись: поочередное разрезание бумажных образцов ленты Мёбиуса с отступами от края на 1/6,1/5,1/4,1/3,1/2 ширины полосы; эксперимент на жёстких конструкциях многогранных поверхностей с топологией односторонней и двухсторонней полос; эксперимент с конструкцией в виде многогранника Штеффена, выполненного из прозрачного оргстекла и наполненного цветным дымом, с его изгибанием и замером количества вышедшего из него дыма.

По результатам экспериментов сделаны следующие выводы:

1) конфигурация фигур, получаемых при разрезании полосы Мёбиуса, зависит от ширины отступа разреза от края;

2) минимальное число рёбер изгибаемой и скручиваемой многогранной поверхности равно 3 и достигается на односторонней поверхности;

3) объём невыпуклого многогранника при деформациях не изменяется.

Список использованных источников:

1. Д. Фукс. Статья «Лента Мёбиуса» в журнале Квант. — (выпуск № 1, 1979).
2. Н.П. Долбилин. Жемчужины теории многогранников. — М.: МЦНМО, 2000.
3. В.А. Александров. Статья «Изгибаемые многогранные поверхности» в Соросовском образовательном журнале. — (выпуск № 5, 1997).
4. Л.Н. Бескин, В.Л. Бескин. Многогранники. — Киев: Вища шк., 1984.

ПРИМЕНЕНИЕ К ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКАМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НАПОЛЕОНА

Морозова Анна Сергеевна

11 класс, МБОУ СОШ №1 с. Измалково, Липецкая обл.

Научный руководитель: уч. мат. МБОУ СОШ №1 с. Измалково Г.В. Шамрина

В работе установлены вид и свойства многоугольников, получающихся в результате применения к четырёхугольникам преобразования Наполеона. Преобразование Наполеона ставит в соответствие каждому многоугольнику новый, вершины которого являются центрами правильных многоугольников, построенных на сторонах исходного. Рассматривались различные четырёхугольники, и на их сторонах во внешнюю сторону строились равносторонние треугольники с центрами в вершинах нового четырёхугольника [1].

Доказано, что при таком преобразовании:

1) квадрат переходит в квадрат, повернутый относительно исходного на 45° (рис.1);
2) ромб переходит в прямоугольник (рис.2);
3) равнобедренная трапеция переходит в дельтоид (рис. 3);
4) выпуклый и невыпуклый дельтоид переходит в равнобедренную трапецию (рис. 4, 5).

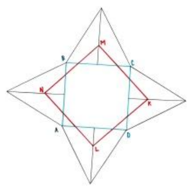


Рис.1

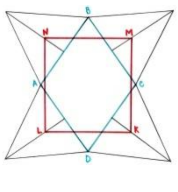


Рис.2

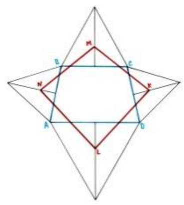


Рис.3

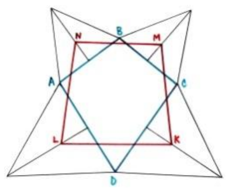


Рис.4

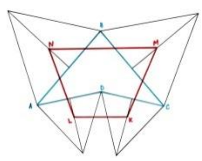


Рис.5

В работе приводится вывод формул, связывающих длины сторон полученных и исходных четырёхугольников.

Список использованных источников:

1. М.И. Сканави. Сборник задач по математике для поступающих в вузы (с решениями). Геометрия. — М.: Изд. дом ОНИКС, 1999, 9-е изд.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ БИЛЬЯРДНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ПРАВИЛЬНОМ ШЕСТИУГОЛЬНИКЕ

Барышева Зарина Александровна
11 класс, МОУ "Университетский лицей", г. Петрозаводск
Научный руководитель: преп. каф. прикл. мат. и киб. ПетрГУ Р.В. Алькин

Задачи по бильярдам чаще всего находятся на стыке нескольких областей математики [1], физики [2] и информатики [3].

В ходе работы изучено поведение бильярдных траекторий в правильном шестиугольнике, поставлены эксперименты, в том числе с использованием программы GeoGebra, а также собственных программ, написанных на языке C++. Введён новый математических аппарат для описания периодический бильярдных траекторий в правильном шестиугольнике.

Изучены подходы для решения аналогичной задачи для треугольников [1], [3] и обнаружена проблема использования шестиугольной решётки на плоскости для изучения поведения траекторий с помощью их развёрток. Введено собственное кодирование траекторий, позволяющее описать комбинаторные типы траекторий и улучшить асимптотическую сложность работы наивного алгоритма перебора с $O(n5^n)$ до $O(n3^{n-2})$, где $n \to \infty$ — количество звеньев траектории. Сформулированы свойства кода траектории, необходимые для получения возможной развертки реальной периодической траектории.

Разработана и реализована программа для генерации и подсчёта количества различных хороших алгебраических кодов, перебора и проверки корректности фиксированной геометрической интерпретации алгебраически хорошего кода. Для оптимальной реализации программы сформулировано и доказано несколько утверждений. Выведена аналитическая рекуррентная формула для количества алгебраически хороших кодов

$$f(n) = 3^{n-2} - \sum_{d \in D} f(d) - 1,$$

где D — множество делителей d числа n, отличных от 1 и n. Доказана универсальность разработанного для правильных шестиугольников алгебраического кода и некоторых его свойств по отношению ко всем правильным многоугольникам с чётным количеством сторон.

Список использованных источников:

1. Я.Б. Воробец, Г.А. Гальперин, А.М Стёпин. Статья «Периодические бильярдные траектории в многоугольниках: механизмы рождения» в журнале УМН. — (том 47, выпуск № 3, 1992).

2. S. Tabachnikov. Remarks on magnetic flows and magnetic billiards, Finsler metrics and a magnetic analog of Hilberts fourth problem. — Dynamical systems and related topics, Cambridge Univ. Press, 2004, pp.233–252.
3. Д.А. Лачинов, А.Ф. Ляхов. Статья «Криптосистема с открытым ключом, созданная на основе математического бильярда.» в журнале Мат. обр. — (выпуск № 2(58), 2011).
4. А.Н. Кириллов, Р.В. Алькин. Статья «Устойчивость периодических бильярдных траекторий в треугольнике» в журнале Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — (выпуск № 18:1, 2018).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Верещагина Софья Сергеевна
10 класс, ФГБУ ВО СПбНИАУ РАН, лицей «Физико-техническая Школа», г. Санкт-Петербург

Научный руководитель: преп. лиц. «Физ.-техн. школа» С.М. Горский

В [1] предложен метод явного отыскания всех решений нестрогого дифференциального неравенства 1-го порядка. В данной работе делаются попытки найти явно все решения нестрогого дифференциального неравенства 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим дифференциальное неравенство

$$x'' - (\lambda_1 + \lambda_2)x' + \lambda_1\lambda_2 x \leq 0. \quad (1)$$

Теорема 1. *Если* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, *то функция* x *является решением неравенства (1) тогда и только тогда, когда для некоторой дифференцируемой невозрастающей функции* H *имеет место представление*

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} \int_{t_0}^{t} H(s) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)s}\, ds.$$

Теорема 2. *Если* $\lambda_1 = \alpha + \beta$ *и* $\lambda_2 = \alpha - \beta\, i$, *где* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то функция* x *является решением неравенства (1) тогда и только тогда, когда для некоторой дифференцируемой невозрастающей функции* H, *для которой выполнена оценка* $\frac{H'(t)}{\cos\beta t} \leq 0$ *и функция* $\frac{H(s)}{\cos^2\beta s}$ *интегрируема, имеет место представление*

$$x(t) = e^{\alpha t} \cos\beta\, t \int_{t_0}^{t} \frac{H(s)}{\cos^2 \beta s}\, ds.$$

Список использованных источников:

1. Ю.А. Ильин. Статья «Общие вопросы интегрирования дифференциальных неравенств в явном виде» в журнале Вест. СПбГУ. Мат. Мех. Астр. — (т. 4 (62), выпуск № 4, 2017).

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА ДЛЯ ШАБЛОНА В ВИДЕ ПОЛУКРУГА

Орлова Екатерина Михайловна

10 класс, Специализированный учебно-научный центр (факультет) — школа-интернат имени А.Н. Колмогорова МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: уч. мат. МАЛ доц. Б.М. Верещагин

Решение геометрических задачи на построение — один из эффективных способов изучения свойств геометрических конструкций. Кроме того, и при решении геометрических задач на вычисление или на доказательство равенства фигур, также часто используется алгоритм построения соответствующей конфигурации.

В работе исследуется разрешимость таких задач с помощью шаблона в виде полукруга (такой шаблон выбран потому, что изучение конструкций, связанных с окружностями, вызывает у учащихся наибольшие затруднения).

Считаем, что полукруг — это инструмент, с помощью которого:

1) строится отрезок, равный диаметру шаблона;
2) строится дуга окружности с радиусом шаблона;
3) продлевается любой отрезок (и, соответственно, находится точка пересечения двух прямых).

Цель исследования — обобщить теорему Штейнера для шаблона в виде полукруга. Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

- рассмотреть алгебраический метод решения задач на построение;
- исследовать алгоритм решения задач на построение полукругом.

В работе показано, что для шаблона выполняется аксиома линейки и предложено построение точки на произвольном луче с началом в центре окружности, заданной центром и радиусом, а также найдены способы построения однородных функций первой степени — таким образом, дважды доказано обобщение теоремы Штейнера для полукруга. Решены некоторые конкретные задачи на построение с использованием шаблона.

Полученные результаты могут рассматриваться на уроках геометрии, на занятиях кружков и спецкурсов, а также в исследовательской работе школьников при решении аналогичных проблем для других шаблонов.

Список использованных источников:

1. В.Т. Базылев, К.И. Дуничев. Геометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. — М. Просвещение, 1975.
2. Научная библиотека избранных естественно-научных изданий. (http://know.alnam.ru/book_gpl.php?id=60).

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Шабес Вячеслав Денисович

11 класс, ФГБУ ВО СПб НИАУ РАН, лицей «Физико-техническая школа», г. Санкт-Петербург

Научный руководитель: преп. лиц. «Физ.-техн. школа» С.М. Горский

Введём обозначение

$$H_p(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}, \ p \neq 0; \\ \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}, \ p = 0, \end{cases}$$

для среднего степенного (среднего Гёльдера) чисел $a_1, \dots, a_n \geq 0$.

Функцию $f : I \to J$ для средних величин M и N назовём *-выпуклой (вогнутой)*, если выполняется неравенство

$$f\big(M(x, y)\big) \leq (\geq) N\big(f(x), f(y)\big), \qquad x, y \in I.$$

Функцию $f : I \to J$ назовём *субаддитивной (супераддитивной)*, если выполняется неравенство

$$f(x + y) \leq (\geq) f(x) + f(y), \qquad x, y \in I.$$

В работе найдены условия, при которых H_pH_q-выпуклые функции являются субаддитивными, а также доказаны теоремы, обобщающие известные классические неравенства.

Теорема 1. *Если функция $f: (0; \infty) \to (0, \infty)$ — H_0H_0-выпукла, то для любых наборов $a_i, b_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ и чисел $p, q > 1$, таких что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, выполнено неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} f(b_i)\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^{n} f\left(a_i^{\frac{1}{p}} b_i^{\frac{1}{q}}\right).$$

Теорема 2. *Если при* $q \geq 1$ *функция* $f: [0;\infty) \to [0;\infty)$ — H_1H_q*-выпукла и* $f(0) = 0$*, то для любых наборов* $a_i, b_i > 0$ *(*$i = 1, \ldots, n$*) верны неравенства*

$$2^{1-\frac{1}{q}}\left(f^q\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + f^q\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\right)^{\frac{1}{q}} \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^q(a_i)\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^q(b_i)\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^q(a_i + b_i)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 3. *Если для заданного* $r \geq 1$ *функции* $f, g: \mathbb{R} \to (0;\infty)$ *таковы, что* $f^{\frac{1}{x+r}}(x)$ *— субаддитивна, а* $g^{\frac{1}{x}}(x)$ *— супераддитивна, то для любых наборов* a_i, b_i *(*$i = 1, \ldots, n$*) верно неравенство*

$$\frac{f(a_1)}{g(b_1)} + \cdots + \frac{f(a_n)}{g(b_n)} \geq \frac{f(a_1 + \cdots + a_n)}{n^{r-1} g(b_1 + \cdots + b_n)}.$$

Список использованных источников:

1. C.P. Niculescu. Статья *«Convexity according to means»* в журнале J. Math. Ineq. Appl. — (том 6, выпуск 4, 2003).
2. Li Yongtao, Gu Xian-Ming, Xiao Jianci. A note on the proofs of generalized Radon inequality. (https://arxiv.org/pdf/1504.05874.pdf).

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ДОМАШНЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Королев Виктор Андреевич, Королева Арина Андреевна

8 класс, МОУ «Гуманитарно-экономический лицей», г. Саратов

Научный руководитель: проф. ГАУ ДПО «Саратовский обл. ин-т развития образования» А.А. Королев

В работе рассматриваются задачи, сводящиеся к задачам линейного программирования, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значение целевой функции, все переменные которой неотрицательны и связаны линейными неравенствами.

При графическом способе, используемом только при наличии не более двух независимых переменных, строится область, ограниченная системой неравенств, а затем, с помощью семейства параллельных прямых, находится оптимальная точка области. При симплекс-методе решаются задачи, в которых встречаются более двух независимых переменных.

В задаче линейного программирования путём введения новых зависимых переменных система неравенств преобразуется в систему равенств, ищется опорное решение, а затем и само оптимальное решение.

В работе изучаются три задачи, на примере которых рассмотрены как графический способ решения, так и симплекс-метод, а затем ставится и решается задача по оптимизации домашнего бюджета при выборе продуктов в магазине.

Список использованных источников:

1. М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. Математика для экономистов: Учебное пособие. — СПб.: Питер, 2016.
2. ЕГЭ 2020. Мат. Проф. уров. Типовые варианты экзаменационных заданий. 36 вар. / Под ред. И.В. Ященко. — М.: Экзамен, 2019.

ЧИСЛА КАТАЛАНА

Паспортникова Екатерина Олеговна
9 класс, МБОУ лицей № 67 г. Иваново

Научный руководитель: уч. мат. лиц. № 67 г. Иваново Л.А. Пятова

Число Каталана C_{n-1} — это количество способов придать смысл выражению $a_1 * \cdots * a_n$, где $a_1, \ldots, a_n$ — числа, а звездочка — некоторая операция. Число C_n можно определить также ещё несколькими способами:

- количество разбиений выпуклого $(n+2)$-угольника на треугольники непересекающимися диагоналями;
- количество способов соединения $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами;
- количество всевозможных способов линеаризации декартова произведения двух линейно упорядоченных множеств, состоящих из 2 и из n элементов соответственно;
- количество правильных скобочных последовательностей длины $2n$, т.е. таких последовательностей из n левых и n правых скобок, в которых количество открывающих скобок равно количеству закрывающих и в любом её префиксе открывающих скобок не меньше, чем закрывающих;
- количество неизоморфных упорядоченных бинарных деревьев с $n+1$ листьями.

В работе изучаются два последних из перечисленных выше определений чисел Каталана. В частном случае $n = 3$ проверена эквивалентность этих двух определений, а именно, равенство $C_3 = 5$ доказано через бинарные деревья и скобочные структуры.

Список использованных источников:

1. А.А Аветисов. Статья «Числа Каталана» в сб. мат-лов III регион. научно-практич. конф. «Колмогоровские чтения — 2007» / под ред. Е.С. Каменецкого, И.Д. Цопанова и др. Владикавказ, 2007.
2. О.В. Кузьмин, Т.Г. Тюрнева. Статья «Числа Каталана, их обобщения и разложения» в серии Дискретная математика и информатика. — (выпуск № 11. Иркутск: Иркут. ун-т, 1999).
3. А.Л. Резник. Компьютерная аналитика и обобщенные числа Каталана в задачах регистрации случайных дискретных объектов. — Новосибирск: Изд-во Сиб. отд. РАН, 2013.
4. А.В. Спивак. Статья «Числа Каталана» в журнале Квант. —выпуск № 3, 2004.

ФОРМУЛА ДЛЯ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ПРИБЛИЗИТЕЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ КОРНЯ ИЗ ЦЕЛОГО ЧИСЛА БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КАЛЬКУЛЯТОРА

Каландадзе Давид Владимирович

11 класс, Щёлковская гимназия № 6», г. Щёлково, Московская обл.

Научный руководитель: уч. мат. МАОУ «Щёлковская гимназия №6»
Г.Г. Решетникова

В работе введены понятия *цельных* и *нецельных* чисел — из которых извлекается или не извлекается целый корень, соответственно.

Замечено, что количество нецельных чисел, между двумя соседними цельными, равно удвоенному корню из меньшего цельного числа.

С помощью производной функции $y = \sqrt{x}$ для приблизительного значения корня из числа n получена и формула

$$\sqrt{n} = \sqrt{d} + \frac{(n-d)}{2\sqrt{d}+1},$$

где d — ближайшее цельное число, не превосходящее n.

С помощью программы Pascal ABC выявлена точность данной формулы.

Список использованных источников:

1. Построение графиков функций. (https://www.desmos.com/).
2. Таблица корней из чисел. (http://nice-diplom.ru/121-tablica-kubicheskih-korney-celyh-chisel-ot-0-do-99.html).

Отпечатано 15 апреля 2020 года.

Издательский центр СУНЦ МГУ,

г. Москва, ул. Кременчугская, д.11, 107-Б.