Лекция 2

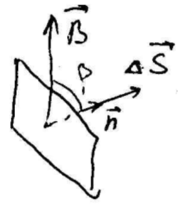
Теорема Гаусса и теорема о циркуляции магнитного поля

Поток магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля

Поток вектора магнитной индукции определяется так же, как и поток вектора напряженности электрического поля, да и вообще любого вектора.

Рассмотрим вначале поток вектора магнитной индукции через элементарную ориентированную площадку ΔS (так называемый элементарный магнитный поток $\Delta\Psi$). Элементарность площадки означает, что она мала по сравнению с масштабом неоднородности магнитного поля, а также то, что её можно считать плоской. Ориентированность площадки означает, что это площадка с уже выбранным направлением нормали $\boldsymbol{n}$ к ней. При этом часто элементарную ориентированную площадку характеризуют вектором её площади: $\Delta\boldsymbol{S} = \Delta S * \boldsymbol{n}$.

Определение. ***Элементарным магнитным потоком*** $\Delta\Psi$ через элементарную ориентированную площадку ΔS называется физическая величина, равная скалярному произведению вектора $\Delta\boldsymbol{S}$ площади площадки на вектор $\boldsymbol{B}$ индукции магнитного поля на этой площадке:



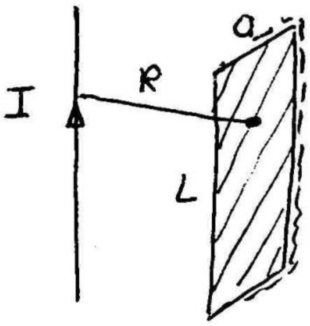
$$\Delta\Psi = (\boldsymbol{B}, \Delta\boldsymbol{S}) = B * \Delta S * cos\beta.$$

где β – угол между векторами $\boldsymbol{B}$ и $\Delta\boldsymbol{S}$.

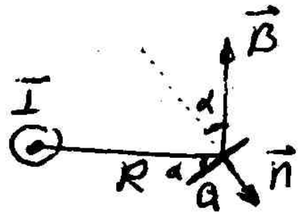
Единица магнитного потока в СИ называется ***вебер*** (Вб). Вебер равен магнитному потоку, проходящему через элемент плоской поверхности площадью 1 м^2, перпендикулярный направлению вектора магнитной индукции однородного магнитного поля, магнитная индукция которого равна 1Тл.

Магнитным потоком Ψ **через произвольную ориентируемую поверхность** называется алгебраическая сумма магнитных потоков через элементарные площадки, образующие эту поверхность: $\Psi = \sum \Delta\Psi_i$. При этом ***направления нормалей к разным элементарным площадкам данной поверхности должны быть согласованы***: *если представить данную поверхность как двухсторонний лист бумаги, то все нормали должны начинаться на одной и той же стороне этой бумаги и не пересекать её.* Такое согласование нормалей может быть осуществлено не для любой поверхности. Наиболее простой и известный пример не ориентируемой поверхности, для которой это сделать нельзя – так называемый лист Мёбиуса. В дальнейшем мы будем рассматривать только ориентируемые поверхности (по умолчанию). Заметим также, что в *случае замкнутой поверхности в качестве нормалей всегда выбираются **внешние нормали***.

Пример 1. По прямолинейному проводнику течет ток I. В плоскости параллельной проводнику расположена узкая прямоугольная рамка длиной L и шириной a, причем a << R, где R – расстояние от середины рамки до проводника. Найти магнитный поток через поверхность рамки.

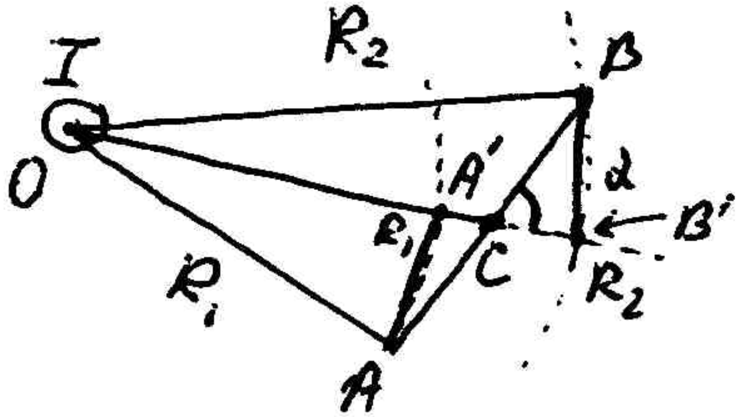


Решение. Т.к. a << R, то рамку можно считать элементарной площадкой (расстояния от различных точек рамки до проводника мало отличаются от R, и, следовательно, по закону Био-Савара величина индукции магнитного поля во всех точках рамки примерно одинаковая; слабо изменяется в пределах рамки также и направление вектора $\boldsymbol{B}$). Поэтому для магнитного потока Ψ через рамку получаем:



$$\Psi = B * S * cos(\pi - \alpha) = -\frac{\mu_0}{2\pi} * \frac{I}{R} * a * L * cos\alpha.$$

Т.к. $a = |AB| << |OC| = R$ (точка C – середина отрезка AB), то углы $\angle BOC$ и $\angle AOC$ малы. Действительно, по теореме синусов $\sin(\angle BOC) = \frac{a}{2}\frac{\sin(\angle OBA)}{R} \leq \frac{a}{2\mathrm{R}} \ll 1.$ Поэтому углы при основании равнобедренных треугольников BOB' и AOA' ($|OB'| = |OB| = R_2$ и $|OA'| = |OA| = R_1$ по построению точек B' и A') мало отличаются от прямых углов. Следовательно,

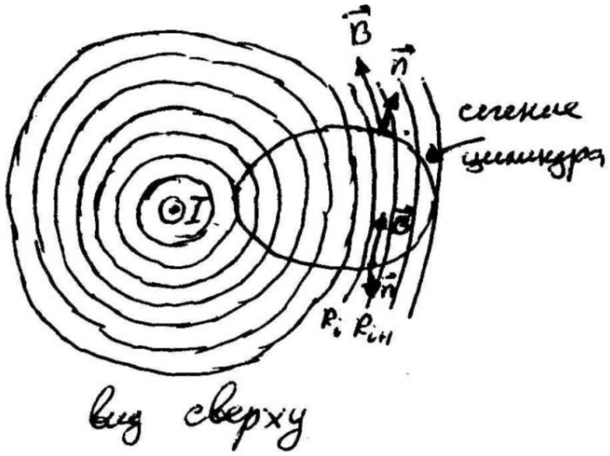


$|AB| cos\alpha = |AC| cos\alpha + |CB| cos\alpha \approx |A'C| + |CB'| = R_2 - R_1$. Т.е. $a * cos\alpha = \Delta R$, где ΔR – разность расстояний до проводника от двух сторон рамки, параллельных проводнику. Таким образом:

$$\Psi = -\frac{\mu_0}{2\pi} * I * L * \frac{\Delta \mathrm{R}}{R}, \qquad |\Psi| = \frac{\mu_0}{2\pi} * I * L * \frac{\Delta \mathrm{R}}{R} \qquad (\Delta\mathrm{R} \ll \mathrm{R}). \quad (1)$$

Найдем теперь магнитный поток $\Psi_ц$ через поверхность S прямого цилиндра высотой L с осью параллельной проводнику с током и ***с основанием произвольной формы***.

Построим ***систему круговых цилиндров*** S_i, имеющих общую ось, совпадающую с проводником, и мало отличающиеся радиусы $((R_{i+1} - R_i)/R_i \ll 1)$, которые монотонно увеличиваются с ростом номера i. Поверхности этих круговых цилиндров «разрежут» боковую поверхность S интересующего нас цилиндра на ***пары узких полосок***. Каждая такая полоска будет ограничена параллельными оси цилиндра отрезками, являющимися линиями пересечения поверхности S с поверхностями двух соседних круговых цилиндров. К каждой из полосок можно применить формулу (1). Причем в каждой паре полосок магнитный поток через одну из полосок будет положительным, а через другую – отрицательным. Абсолютная же величина магнитного потока через обе полоски будет одинаковой $\left(|\Psi_{i+}| = |\Psi_{i-}| = \frac{\mu_0}{2\pi} * I * L \frac{R_{i+1} - R_i}{R_i}\right)$. Поэтому суммарный поток через боковую поверхность интересующего нас цилиндра будет равен нулю. Поток вектора через основания цилиндра также очевидно равен нулю. Следовательно, мы доказали, что $\Psi_ц = 0$. Нетрудно видеть, что этот результат никак не зависит от того пересекает ли проводник с током основание цилиндра или не пересекает.



Можно доказать, что этот же результат справедлив и для произвольной замкнутой поверхности, находящейся в магнитном поле, создаваемом любым контуром с током. Так как согласно гипотезе Ампера магнитное поле постоянных магнитов создается микротоками, текущими внутри магнитов, то можно утверждать, что ***для любого постоянного магнитного поля магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю.*** Это утверждение называют ***теоремой Гаусса для магнитного поля***.

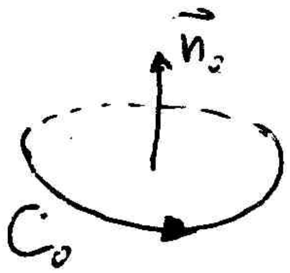
Вернемся к понятию ***линии магнитной индукции***. Как и в случае линий напряженности электрического поля, ***линии магнитной индукции проводят так, чтобы их густота характеризовала модуль вектора B в данном месте (правило густоты)***. И, следовательно, из теоремы Гаусса следует, что при соблюдении правила густоты***, сколько линий магнитной индукции входит в произвольную замкнутую поверхность, столько же линий из нее и выходит***. Иными словами, линии магнитной индукции не могут иметь ни начала, ни конца. Следовательно, они могут быть либо замкнутыми, либо приходить из бесконечности и уходить в бесконечность, что является частным случаем замкнутости. Итак: ***линии магнитной индукции имеют важную особенность – они всегда замкнуты***. Напомню, что с электростатическим полем дело обстоит иначе: силовые линии электростатического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Отсюда следует, что теорема Гаусса и связанная с ней замкнутость линий магнитной индукции указывают на то, что ***магнитных зарядов, подобных электрическим зарядам, в природе нет!***

Заметим, что поля с замкнутыми “силовыми” линиями называют ***вихревыми***. Таким образом, ***магнитное поле – вихревое поле***.

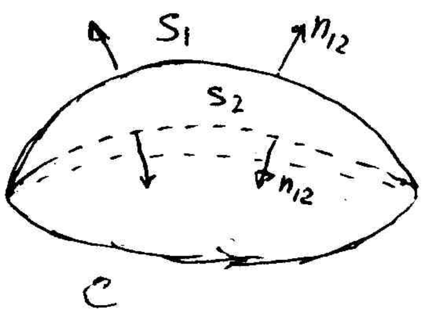
Магнитный поток через контур

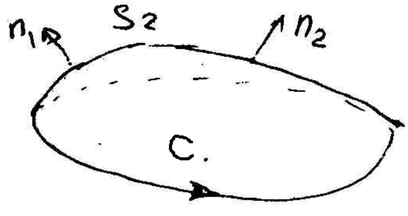
Из теоремы Гаусса для магнитного поля вытекает следующее утверждение: ***если две поверхности S_1 и S_2 ограничены одним и тем же ориентированным контуром C, то магнитный поток через эти поверхности одинаков*** **($\Psi_1 = \Psi_2$).**

Поясню, что ***ориентированным называется контур (замкнутая линия), для которого указано направление обхода***. При этом ***по определению*** считается, что ***если ориентированный контур C_0 ограничивает некоторую элементарную площадку, то направление нормали к этой площадке (направление вектора площади площадки) образует правый винт (связано правилом буравчика) с направлением обхода контура.***



Докажем приведённое выше утверждение. Рассмотрим замкнутую поверхность S_{12}, образованную поверхностями S_1 и S_2. Как всегда при вычислении потока через замкнутую поверхность нормали к поверхности S_{12} должны быть внешними (т.е. ***не направлены*** в область, ограниченную замкнутой поверхностью). А направления нормалей к поверхности, ограниченной ориентированным контуром, определяется ориентацией этого контура. Поэтому при объединении поверхностей S_1 и S_2, огра-





ниченных одним и тем же ориентированным контуром либо нормали к поверхности S_1, либо нормали к поверхности S_2 будут внутренними по отношению к поверхности S_{12} (в приведённом на рисунке примере это происходит с нормалями к поверхности S_2). Поэтому поток Ψ_{12} через поверхность S_{12} будет равен ***разности*** потоков Ψ_1и Ψ_2 :

$$\Psi_{12} = \Psi_1 - \Psi_2.$$

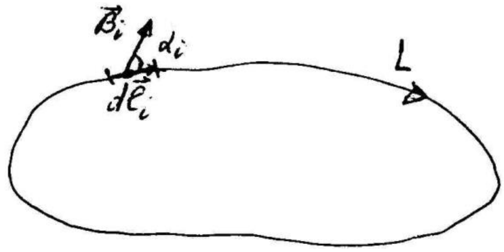
Но по теореме Гаусса $\Psi_{12} = 0$. Следовательно, $\Psi_1 = \Psi_2$, ч.т.д.

В соответствии с доказанным утверждением, магнитные потоки через все поверхности, ограниченные некоторым ориентированным контуром одинаковы. Это позволяет ввести понятие потока через ориентированный контур.

Определение. ***Магнитным потоком через данный ориентированный контур*** *называется магнитный поток через любую поверхность, ограниченную этим контуром.*

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции

Рассмотрим произвольный ориентированный контур (замкнутую кривую) L. Разобьем его на элементарные участки $\boldsymbol{dl}$. Пусть эти участки настолько малы, что индукция магнитного поля в пределах каждого участка практически не меняется. Тогда ***циркуляцией вектора B индукции магнитного поля вдоль ориентированного контура произвольной формы называется сумма***:



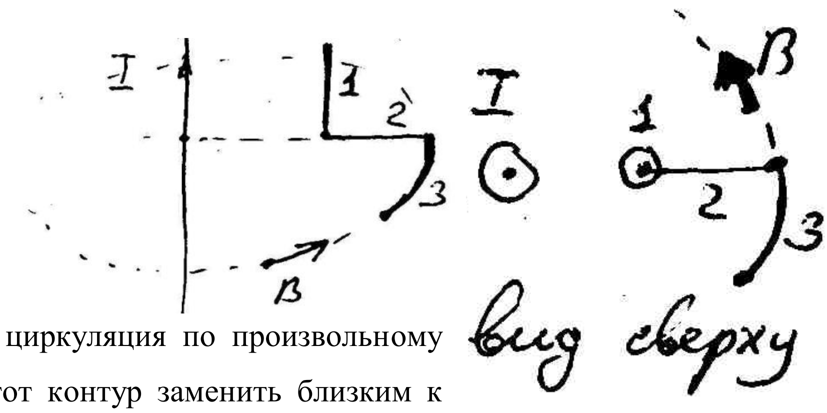
$$Ц_L = \oint_L (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{dl}) = \sum_i (\boldsymbol{B}_i \boldsymbol{dl}_i) = \sum_i B_i dl_i \, cos\alpha_i,$$

где суммирование (интегрирование) ведется по всему контуру, а α_i – угол между векторами $\boldsymbol{B}_i$ и $\boldsymbol{dl}_i$ (направление векторов $\boldsymbol{dl}_i$ определяется направлением обхода контура).

Заметим, что циркуляция однородного поля по любому замкнутому контуру равна нулю:

$$Ц_{L,\text{однор}} = \sum_i (\boldsymbol{B}_i \boldsymbol{dl}_i) = \left(\boldsymbol{B}, \sum_i \boldsymbol{dl}_i\right) = (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{0}) = 0.$$

Найдем теперь циркуляцию индукции магнитного поля, создаваемого прямолинейным проводником с током. Поскольку циркуляция однородного поля по любому замкнутому контуру равна нулю, то циркуляция по произвольному контуру не изменится, если этот контур заменить близким к нему контуром, образованным последовательными **элементарными** (очень малыми) участками 3 типов:



1) участки, направленные вдоль прямых, параллельных оси тока;

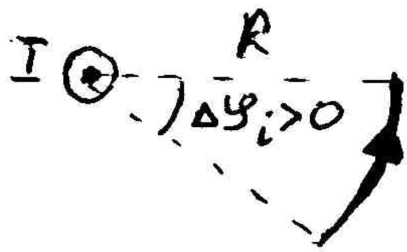
2) участки, направленные вдоль прямых, перпендикулярных оси тока и проходящих через нее;

3) участки, направленные по дугам окружностей, лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси тока, с центрами, лежащими на этой оси (иными словами участки, совпадающие с участками линий индукции магнитного поля прямого тока).

Вклады в циркуляцию от элементарных участков первого и второго типов равны нулю, поскольку на этих участках $\boldsymbol{B}_i \perp \boldsymbol{dl}_i$. Вклады от участков третьего типа найдем, воспользовавшись законом Био-Савара:

$$\left(\boldsymbol{B}_i^{(3)}, \boldsymbol{dl}_i^{(3)}\right) = B_i^{(3)}\, dl_i^{(3)} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\Delta\phi_i R = \frac{\mu_0}{2\pi} I \Delta\phi_i,$$

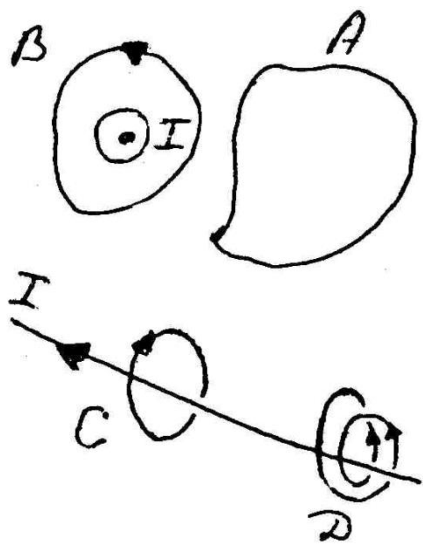
где $\Delta\phi_i$ – угловая ширина i-го участка третьего типа. Заметим, что величины $dl_i^{(3)}$ и $\Delta\phi_i$ в этой формуле необходимо считать алгебраическими: они являются положительными, если направление обхода i-го участка и направление тока образуют правый винт (т.е. направление обхода i-го участка совпадает с направлением вектора магнитной индукции на i-м участке).



Для контура, очевидно, имеем

$$\sum \Delta\phi_i = 2\pi K,$$

где K – алгебраическое число обходов контура вокруг оси тока. На рисунке приведены контуры, обходящие вокруг оси тока ноль (A), один (B), минус один (C) и два (D) раза.



Из последних двух соотношений следует, что

$$\oint_L (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{dl}) = \mu_0 i \qquad (2)$$

где $i = KI$ – полная алгебраическая сила тока, протекающего сквозь поверхность, ограниченную рассматриваемым контуром. Причем положительное направление обхода контура L и положительное направление тока образуют правый винт: положительное направление обхода контура совпадает с направлением вращения правого буравчика, который движется поступательно в направлении тока. Формула (1) легко обобщается на случай, когда контур охватывает несколько прямых токов:

$$\oint_L (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{dl}) = \mu_0 \sum_{j=1}^{n} i_j, \qquad (3)$$

где n – число всех проводников с током, охватываемых контуром L. В этом случае правило знаков удобнее переформулировать для токов: ток i считается положительным, если его направление и ***выбранное*** (в рассматриваемой задаче) направление обхода контура L образуют правый винт. В противном случае ток i считается отрицательным.

Соотношение (3) выражает теорему о циркуляции вектора индукции магнитного поля. Мы получили это соотношение в случае прямолинейных токов. Можно показать, что оно остается в силе и для произвольной системы постоянных токов.

Итак, мы доказали теорему о циркуляции индукции магнитного поля. В системе единиц СИ ***циркуляция индукции магнитного поля системы постоянных токов по данному ориентированному контуру равна алгебраической сумме сил токов, охватываемых этим контуром, умноженной на магнитную постоянную. При этом ток i считается положительным, если его направление и выбранное (в рассматриваемой задаче) направление обхода контура L образуют правый винт и каждый ток считается столько раз, сколько раз его охватывает контур L.***

Соображения симметрии в магнитостатике

При решении задач в электростатике мы часто пользовались соображениями симметрии. В общем виде эти соображения можно сформулировать примерно так. Пусть некоторое пространственное преобразование (поворот, симметрия относительно плоскости, параллельный перенос) не меняет распределение заряда в пространстве. Тогда оно не меняет и напряженности электростатического поля. Иными словами пространственное распределение электрического заряда и создаваемого им электростатического поля имеют одну и ту же пространственную симметрию. Это свойство казалось нам настолько очевидным, что мы его даже не доказывали. На самом деле оно является прямым следствием принципа суперпозиции для напряженности электрического поля и закона Кулона, точнее выражения для вектора напряженности электрического поля неподвижного точечного заряда, помещенного в начало координат:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}.$$

Из последней формулы сразу следует, что напряженность электрического поля точечного заряда обладает всеми элементами симметрии, которыми обладает точка (точечный заряд).

В случае магнитного поля ситуация оказывается сложнее: пространственная симметрия системы токов может не совпадать с пространственной симметрией создаваемого этой системой магнитного поля. Чтобы убедиться в этом, посмотрим на пространственную симметрию поля, создаваемого прямолинейным проводником с током. Сам проводник с током, очевидно, обладает симметрией поворота на произвольный угол относительно своей оси, симметрией параллельного переноса вдоль этой оси, а также симметрией относительно плоскости, содержащей проводник. Создаваемое же проводником магнитное поле обладает только первыми двумя симметриями. То есть привычные для нас по электростатике «соображения симметрии» в магнитостатике сохраняются только для симметрии поворота и параллельного переноса. Пользуясь принципом суперпозиции для напряженности магнитного поля и законом Био-Савара-Лапласа можно доказать, что если система токов обладает

симметрией относительно некоторой плоскости, то распределение вектора индукции магнитного поля, создаваемого этими токами, обладает специфической симметрией. Оно переходит само в себя, если наряду с симметрией относительно этой плоскости осуществить изменение направления вектора индукции $\vec{B}$ в каждой точке пространства на противоположное (см. рисунок на предыдущей странице).

Как известно, в электростатике расчет полей создаваемых симметричным распределением зарядов сильно упрощается при использовании теоремы Гаусса. В магнитостатике при расчете магнитных полей, создаваемых симметричными распределениями токов, оказывается полезной теорема о циркуляции вектора магнитной индукции. В качестве примера ниже показано, как эта теорема позволяет рассчитать поле толстого прямолинейного проводника с симметричным распределением плотности тока по поперечному сечению, а также поля тороида и соленоида.