Глава 1

Кинематика одномерного движения

Фрагменты теории и примеры

В этом задании мы говорим о движении вдоль прямой, иными словами, об одномерном движении. Основы кинематики одномерного движения изложены во многих учебниках. Можно порекомендовать, например, учебник Кикоиных [1] (гл. 1 и гл. 2) или учебник под редакцией Мякишева [2] (§§ 1.1–1.7, 1.20–1.23). Кроме того, многие теоретические вопросы весьма удачно разбираются в статьях [3, 4, 5, 6] из журнала «Квант». Поэтому ниже мы не говорим подробно о теории, а только уточняем некоторые определения и разбираем ряд примеров.

При движении тела по прямой a его положение в пространстве в момент времени t обычно описывается его координатой $x(t)$, которая откладывается по координатой оси OX, совпадающей с прямой a. При решении задачи первым делом следует выбрать направление и ноль координатной оси, исходя из соображений удобства. Когда мы говорим «выбрать», то имеем в виду, что необходимо нарисовать схематичный рисунок и на нём указать: направление оси, положение нуля и координаты важных для решения точек.

Назовём *средней скоростью* быстроту изменения координаты тела. Если в момент времени t_1 координата равна $x(t_1)$, а в момент времени t_2 ($t_2 > t_1$) координата равна $x(t_2)$, то средняя скорость $\langle v_x \rangle$ в промежутке времени от t_1 до t_2 равна

$$\langle v_x \rangle = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{1.1}$$

Треугольные скобки означают среднее, а индекс «x» указывает на то, что речь идёт о быстроте изменения координаты x. Средняя скорость, определяемая соотношением (1.1) может быть отрицательной, например, если тело движется в сторону, противоположную положительному направлению оси OX. В формулировках задач средней скоростью обычно называют модуль величины, заданной формулой (1.1):

$$v_{\text{ср.}} = |\langle v_x \rangle| = \left| \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \right|. \tag{1.2}$$

Средняя путевая скорость определяется по формуле

$$v_{\text{ср.пут.}} = \frac{L_{12}}{t_2 - t_1}, \tag{1.3}$$

где L_{12} — путь, пройденный телом в промежутке времени от t_1 до t_2.

Мгновенной скоростью v_x мы называем среднюю скорость за очень маленький промежуток времени Δt:

$$v_x(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad \Delta t \to 0. \tag{1.4}$$

Далее мы обычно называем мгновенную скорость просто скоростью. Геометрический смысл формулы (1.4) состоит в том, что скорость в момент времени t — это тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику зависимости координаты от времени $x(t)$ в точке с абсциссой t.

Пример 1. На рис. 1.1 вы видите график зависимости координаты некоторого тела от времени. Красные линии — это отрезки касательных к графику, проведённых в разных точках. Касательная, проведённая в т. D, практически совпадает с графиком.

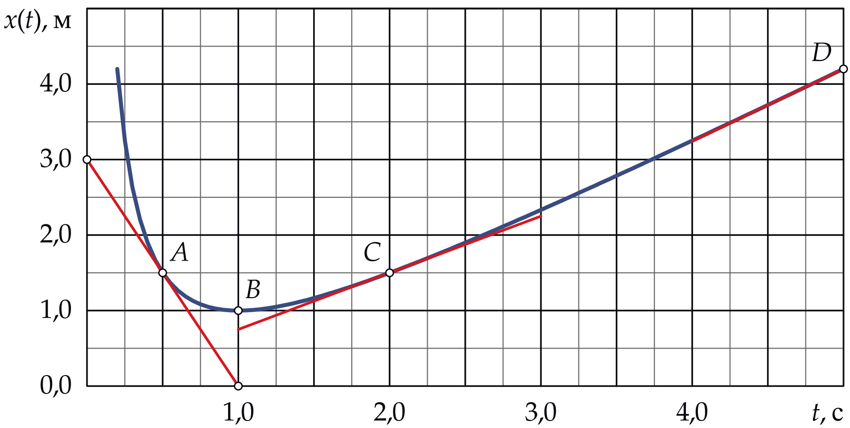

Рис. 1.1

Продолжая касательные до пересечения с осями координат (как это сделано с касательной, проведённой в т. A) можно приближённо определить скорость. Значения скоростей равны: $v_x(0{,}5\,\text{с}) \approx -3$ м/с, $v_x(1{,}0\,\text{с}) = = 0$, $v_x(2{,}0\,\text{с}) \approx 0{,}75$ м/с, $v_x(5{,}0\,\text{с}) \approx 1{,}0$ м/с.

Часто бывает весьма непросто точно провести касательную к графику, поэтому способ определения скорости по тангенсу угла наклона касательной к графику координаты следует рассматривать как оценочный, позволяющий, например, выделить участки графика, на которых скорость положительная или отрицательная или сравнить скорости в двух точках.

При решении задач активно используется график зависимости скорости от времени, поскольку площадь трапеции, ограниченной графиком функции $v_x(t)$, осью времени, а также прямыми $t = t_1$, $t = t_2$ численно равна изменению координаты тела в промежутке времени от t_1 до t_2.

Пример 2. Ломанная $ABCD$ на графике, показанном на рис. 1.2, — это зависимость скорости материальной точки от времени.

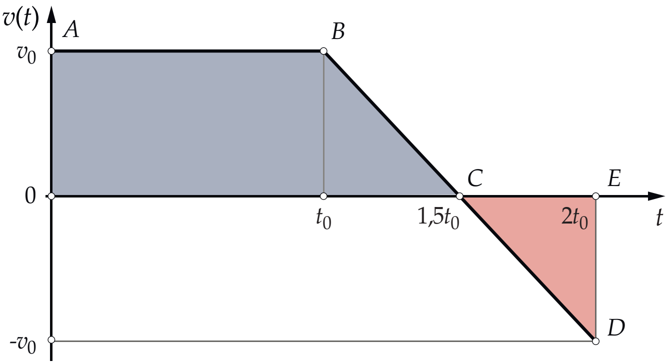

Рис. 1.2

Изменение координаты точки к моменту времени $1{,}5t_0$ равно площади трапеции $0ABC$:

$$x(1{,}5t_0) - x(0) = S_{0ABC} = \frac{1{,}5t_0 + t_0}{2} \cdot v_0 = \frac{5v_0t_0}{4}.$$

Изменение координаты точки к моменту времени $2t_0$ равно разности площадей трапеции $0ABC$ и треугольника CDE, поскольку при $t > 1{,}5t_0$ скорость точки отрицательная:

$$x(2t_0) - x(0) = S_{0ABC} - S_{CDE} = v_0t_0.$$

Путь, пройденный точкой за время $2t_0$, отличается от изменения координаты к этому моменту времени. Действительно, при $t > 1{,}5t_0$ координата убывает, а путь продолжает возрастать. Путь, пройденный за время $2t_0$ равен сумме площадей трапеции $0ABC$ и треугольника CDE:

$$L(2t_0) = S_{0ABC} + S_{CDE} = 2v_0t_0.$$

Средняя скорость $\langle v_x(t)\rangle$ до момента времени t_0 остаётся постоянной и равной v_0, далее начинает уменьшаться и в момент времени $2t_0$ становится равна $0{,}5v_0$. Средняя путевая скорость до момента времени $1{,}5t_0$ изменяется также, как обычная средняя скорость, далее в течение некоторого времени (его можно найти) уменьшается, а потом начинает расти и в итоге в момент времени $2t_0$ становится равна v_0.

Пример 3. (*АРЗ*) Верблюд удаляется от оазиса в виде круга радиусом $R_0 = 1$ км, двигаясь по прямой, проходящей через его центр. Скорость верблюда уменьшается обратно пропорционально расстоянию до центра. В начале движения скорость верблюда у границы оазиса равна $v_0 = 2$ м/с. Определите время движения верблюда до точки, расположенной на расстоянии 8 км от границы оазиса.

Идея решения этой задачи состоит в том, чтобы изобразить график зависимости обратной скорости верблюда, иначе говоря, величины $\frac{1}{v}$ от расстояния до центра оазиса r. Легко видеть, что этот график будет представлять собой отрезок прямой.

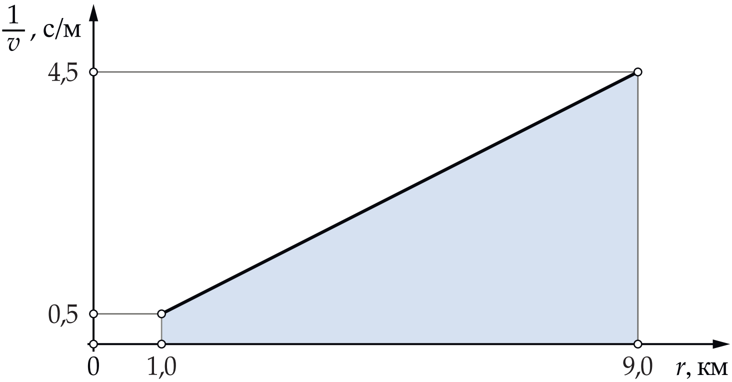

Рис. 1.3

Поскольку для скорости верблюда справедливо (при малых Δr и Δt) очевидное равенство $v(t) = \frac{\Delta r}{\Delta t}$, площадь ΔS узкого столбика ширины Δr и высоты $\frac{1}{v}$ равна времени, за которое расстояние изменяется на Δr:

$$\Delta S = \frac{1}{v} \cdot \Delta r = \frac{\Delta t}{\Delta r}\Delta r = \Delta t.$$

Отсюда следует, что время движения от границы оазиса до точки на расстояния 8 км от границы (или 9 км от центра) равно площади закрашенной трапеции на рис. 1.3. Подсчитывая эту площадь, получим ответ:

$$T = \frac{0{,}5 + 4{,}5}{2} \cdot 8000 \text{ с} = 2 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 5 \text{ ч } 30 \text{ мин}.$$

При вычислениях с использованием определения мгновенной скорости могут быть полезны следующие математические соотношения, справедливые при $\Delta x \to 0$:

$$\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = n x^{n-1}, \tag{1.5}$$

где показатель степени n может быть любым числом: положительным, отрицательным, дробным;

$$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \cos x, \quad \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\sin x. \tag{1.6}$$

Определение *ускорения* похоже на определение мгновенной скорости:

$$a_x(t) = \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}, \quad \Delta t \to 0. \tag{1.7}$$

По физическому смыслу ускорение — это быстрота изменения скорости. Следует особо отметить, что в общем случае и скорость $v_x(t)$, и ускорение $a_x(t)$ являются функциями времени. Мы исследуем самые простые модели, в которых либо скорость считается постоянной, либо ускорение.

При движении с постоянным ускорением скорость изменяется линейно (это следует из определения ускорения), так что справедливо соотношение

$$v_x(t) = v_x(0) + a_x t. \tag{1.8}$$

Зависимость координаты тела $x(t)$ от времени при движении с постоянным ускорением a_x даётся формулой

$$x(t) = x(0) + v_x(0)t + \frac{a_x t^2}{2}. \tag{1.9}$$

Комбинируя формулы (1.8) и (1.9), можно получить полезную формулу для изменения координаты

$$x(t) - x(0) = \frac{v_x^2(t) - v_x^2(0)}{2a_x}. \tag{1.10}$$

Движение вдоль вертикальной прямой в поле тяжести Земли при некоторых допущениях (как минимум, следует пренебречь силой сопротивления) — это типичный случай движения с постоянным ускорением g.

Основные задачи

Везде, где требуется, ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2.

1. Поезд въезжает на мост со скоростью v_0. Если он будет на мосту разгоняться с некоторым ускорением, то проедет мост за время $t_1 = 30$ с, если с таким же ускорением он будет тормозить, то проедет мост за время $t_2 = 60$ с. Изобразите качественный график зависимости скорости от времени для каждого случая. За какое время t_3 поезд проедет мост при равномерном движении со скоростью v_0?

2. 1) Небольшое тело, движущееся вдоль прямой, в течение некоторого времени удаляется на расстояние 1 м от начальной точки и останавливается. Известно, что ускорение тела в любой момент времени по абсолютной величине не больше 1 м/с^2. Чему равно минимально возможное время движения тела?

2) Тело, двигаясь с постоянным ускорением по прямой, удаляется от начальной точки на расстояние 1 м за 1 с. Чему может быть равна скорость w тела в середине пути? В ответе укажите границы диапазона: $w_{\min}$ и $w_{\max}$.

3. Специальный электропоезд отходит от станции, разгоняясь с постоянным ускорением. Первый вагон проходит мимо края платформы за время $t_{\text{перв.}}$, а последний за время $t_{\text{посл.}}$; в начальный момент кабина машиниста находится у самого края платформы.

1) Средняя скорость электропоезда (к моменту, когда мимо края платформы пройдут все вагоны) в процессе разгона оказалась равна u. Чему равна длина одного вагона? Чему равна длина поезда?

2) Во сколько раз отличается время t_4, за которое четвёртый вагон проходит мимо края платформы, от времени t_5, за которое мимо края платформы проходит пятый вагон.

4. График зависимости скорости материальной точки от времени показан на рис. 1.4, v_0 и t_0 — известные константы.

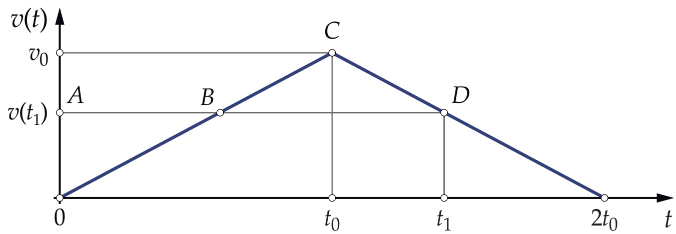

Рис. 1.4

1) Докажите, что максимальная средняя скорость движения точки достигается в момент времени t_1, такой что площади треугольников $0AB$ и BCD равны. Найдите t_1.

2) Используя любую доступную компьютерную программу, постройте график зависимости средней скорости от времени для интервала времени от 0 до $2t_0$. Для удобства построения можете считать параметры v_0 и t_0 безразмерными, равными 1.

3) Представьте, что синяя линия на рис. 1.4 — это график зависимости средней скорости (!) точки от времени. Изобразите для этого случая график зависимости скорости $v(t)$ от времени.

5. Упругий мяч, отпущенный с высоты h над полом, и движущийся всё время вдоль одной прямой, при каждом столкновении с полом теряет часть кинетической энергии. В простейшей модели столкновения скорость мяча в конце столкновения считается равной $v' = k \cdot v$, где v — скорость мяча в начале столкновения, k — численный коэффициент ($k < 1$), который иногда называют *коэффициентом восстановления*. Далее везде в этой задаче следует считать, что время столкновения с полом и сила сопротивления воздуха пренебрежимо малы.

1) Пусть коэффициент восстановления при любом столкновении мяча с полом равен $k = 0{,}9$. Мяч отпускают с высоты $h = 1$ м. На какую высоту поднимется мяч после пятого отскока от пола? Через какое время после начала движения мяч столкнётся с полом тридцатый раз?

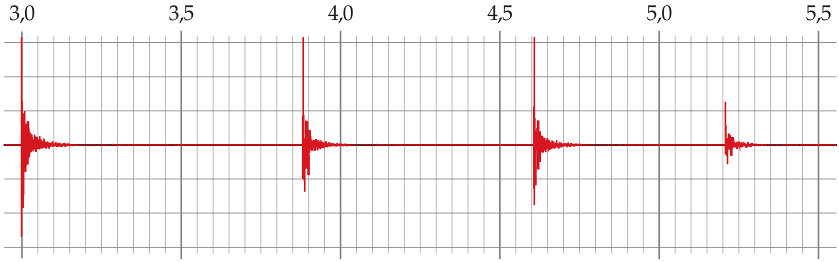

Рис. 1.5

2) На рис. 1.5 вы видите фрагмент зависимости громкости звука от времени при ударах футбольного мяча о пол. График получен с помощью микрофона и программы Audacity. Первый пик соответствует первому удару мяча о пол. Определите коэффициент восстановления k в данном случае. Оцените погрешность полученного результата.

6. Определите экспериментально коэффициент восстановления в процессе многократных столкновений мяча с полом. Запишите звук столкновений с помощью, например, бесплатной программы Audacity, а затем, анализируя амплитудно-временную характеристику (следует переключиться в режим «Волноформа (Дб)» в меню «Аудиотрек»), определите время столкновений. Далее вычислите время между столкновениями, рекомендуется получить не менее трёх точек, по которым можно определить коэффициент восстановления.

Советуем произвести эксперимент на кафельном полу. Желательно использовать резиновый мяч «прыгун». Начальную высоту рекомендуем установить порядка 1 м. Следует позаботиться о том, чтобы в процессе движения мяч как можно меньше смещался по горизонтали от начальной точки.

7. Назовём *безразмерной скоростью* отношение $u = \dfrac{v(t)}{v_0}$, где $v(t)$ — скорость тела в момент времени t, а v_0 — известная константа. Аналогично, отношение $\tau = \dfrac{t}{t_0}$ назовём *безразмерным временем*.

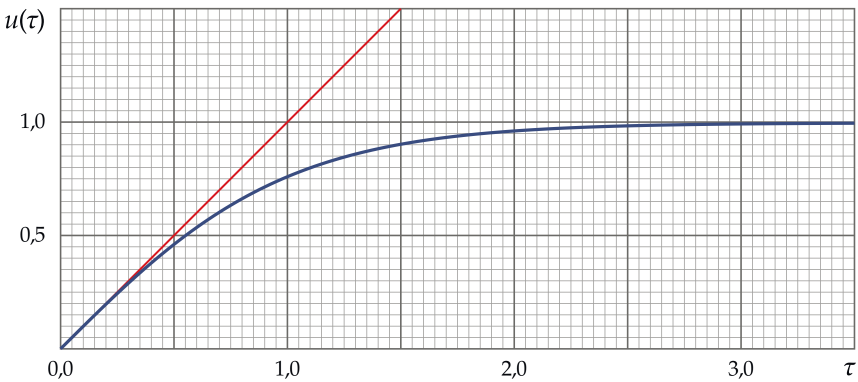

Рис. 1.6

На рис. 1.6 линией синего цвета изображена зависимость $u(\tau)$ для некоторого тела, движущегося прямолинейно. Линия красного цвета — касательная к графику функции $u(\tau)$, проведённая в т. $\tau = 0$.

1) Чему равно ускорение тела при следующих значениях безразмерного времени: $\tau = 0{,}1$; $\tau = 3{,}9$; $\tau = 1{,}0$?

2) Какое расстояние пройдёт тело в промежутке изменения безразмерного времени: от 0 до 0,5; от 3,0 до 4,0?

3) Определите с относительной погрешностью не более 5 % расстояние, которое проходит тело за период времени от 0 до $4t_0$.

4) Зависимость $u(\tau)$, представленная на графике, характерна для падающего (в отсутствие ветра) с большой высоты теннисного мяча. Каков при этом физический смысл отношения $\dfrac{v_0}{t_0}$ и величины v_0?

8. Капли воды, образующие туман, — маленькие (порядка 10 мкм), поэтому сила вязкого трения, действующая на каплю со стороны воздуха, оказывается сопоставимой с силой тяжести уже при небольшой скорости падения капли порядка 1 см/с.

Синяя линия на рис. 1.7 — это график зависимости скорости v от пройденного расстояния S при вертикальном движении капли вниз; шкала слева. Красная линия — график зависимости обратной скорости $\frac{1}{v}$ от расстояния, пройденного каплей; шкала справа. Ускорение капли в нулевой момент времени обусловлено только силой тяжести и равно g.

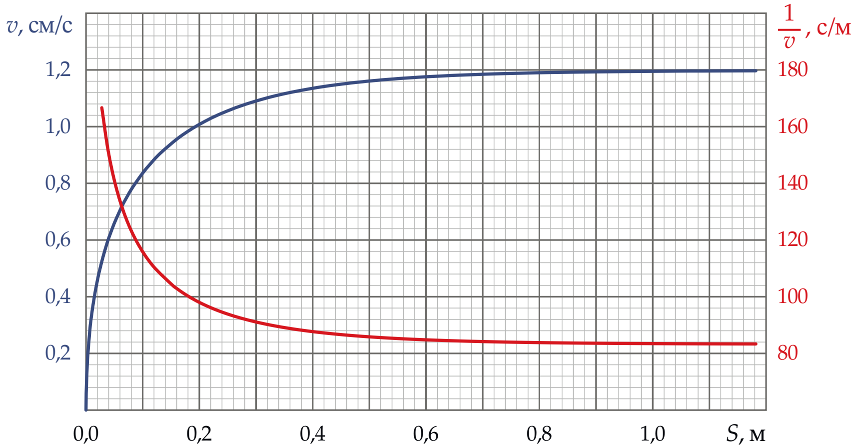

Рис. 1.7

1) Чему равно ускорение капли на расстоянии порядка метра от начальной точки?

2) Найдите ускорение капли на расстоянии 0,2 м от начальной точки.

3) Определите как можно точнее время, за которое расстояние между каплей и начальной точкой увеличивается от 0,2 м до 1,0 м. Оцените точность полученного результата.

9. Если суммарная мощность сил, действующих на тело, остаётся постоянной при его движении по прямой, то справедливо соотношение

$$a \cdot v = \text{const}, \tag{1.11}$$

где a — ускорение тела в некоторый момент времени, а v — его скорость в этот момент. Материальная точка движется так, что всё время остаётся справедливым равенство (1.11), при этом в нулевой момент времени: $a = a_0 = 1$ м/с^2.

1) Изобразите график зависимости величины $\frac{1}{a}$ от скорости v, если начальная скорость равна: $v_0 = 0{,}5$ м/с; $v_0 = 1$ м/с; $v_0 = 2$ м/с. Для $v_0 = 1$ м/с определите время, за которое скорость увеличивается на 2 м/с.

2) Известно, что к моменту времени $t = 3$ с скорость точки увеличилась в два раза. Чему равна в этом случае скорость v_0?

3) При условиях п. 2) определите скорость точки в произвольный момент времени t.

10. Одинаковые шарики, движущиеся вдоль одной прямой, при абсолютно упругом столкновении обмениваются скоростями (рис. 1.8).

Рис. 1.8. Две одинаковые бусинки, скользящие по горизонтальной спице без трения, до и после столкновения.

1) Три одинаковые бусинки насажены на гладкую, очень длинную спицу (рис. 1.9, указаны координаты и скорости бусинок в некоторый момент времени). Для каждой бусинки изобразите качественный график зависимости координаты от времени. Начальную координату и скорость каждой бусинки выберите произвольным образом. Определите максимально возможное количество столкновений между бусинками.

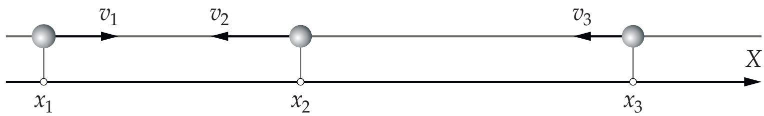

Рис. 1.9

2) На гладкую спицу насажено n бусинок. Чему равно максимально возможное количество столкновений между бусинками в этом случае.

3) По гладкой горизонтальной спице навстречу друг другу скользят две группы одинаковых маленьких бусинок. В первой группе их число — n, во второй — m. Все скорости бусинок разные, причём в первой группе $v_1 > v_2 > \ldots > v_n$, а во второй $u_1 > u_2 > \ldots > u_n$. В некоторый момент времени t_0 расстояние как между первыми из сближающихся бусинок, так и между каждой парой соседних бусинок оказалось равным L. Вычислите следующие величины: число соударений N бусинок друг с другом, если удары абсолютно упругие; время τ, прошедшее от момента t_0 до последнего соударения.

Литература

[1] Кикоин И. К., Кикоин А. К. Физика: Учеб. для 9 кл. сред. шк. — 2-е изд. — М. : Просвещение, 1992. — 192 с.

[2] Балашов М. М., Гомонова А. И., Долицкий А. Б. и др. Физика: Механика. 10 кл.: Учеб. для углубленного изучения физики / Под ред. Мякишева Г. Я. — 6-е изд. — М. : Дрофа, 2004. — 496 с.

[3] Кикоин А. К. Перемещение при прямолинейном равноускоренном движении // Квант. — 1983. — № 10. — С. 32–33.

[4] Кикоин А. К. О графике прямолинейного равноускоренного движения // Квант. — 1983. — № 10. — С. 33–34.

[5] Шапиро А. И. Поговорим о средней скорости // Квант. — 1986. — № 9. — С. 25–27.

[6] Бондаров М. Н. Когда помогают графики // Квант. — 2014. — № 1. — С. 47–51.