Занятие 3. Построение отрицаний

Часть 1. Теория и примеры решения задач

В логических задачах часто встречается условие, что кто-то солгал. Чтобы решить такую задачу, надо понимать, какой смысл будет нести ложное утверждение. На этом занятии мы научимся строить отрицания к часто встречающимся логическим конструкциям, а также поговорим о том, как не забывать рассматривать все случаи, которые возможны по условию задачи, научимся строить полный перебор и поговорим, как этот перебор можно сократить.

1. Что такое отрицание?

При построении отрицаний будем полагаться не на интуицию, а на определение. А еще обязательно будем учитывать правила русского языка, поэтому, когда меняем одни слова на другие, то подправляем предложения, чтобы они грамотно звучали. И еще отметим, что в русском языке много синонимов.

Отрицание утверждения – это такое утверждение, что если верно утверждение, то неверно отрицание утверждения и наоборот, если верно отрицание утверждения, то неверно утверждение. Легче понять смысл этого определения на примере:

Утверждение: «Сегодня Петя ходил в школу».

Отрицание утверждения: «Сегодня Петя не ходил в школу».

Верно ровно одно из этих утверждений. Оба утверждения не могут быть верны: Петя не мог одновременно сходить и не сходить сегодня в школу. Аналогично они не могут оба быть ложными.

Исходя из определения можем понять, что утверждение «Сегодня Петя ходил не в школу» не является отрицанием утверждения «Сегодня Петя ходил в школу». Петя мог остаться дома и никуда не ходить, тогда оба утверждения будут ложными. А мог за день успеть сходить и в школу, и в магазин (то есть, не школу), тогда оба утверждения будут правдивыми.

Заметим, что отрицанием отрицания утверждения будет само утверждение. Это также следует из определения отрицания. Пример:

Утверждение: «Сегодня Петя не ходил в школу».

Отрицание утверждения: «Сегодня Петя ходил в школу».

2. Как построить отрицание к предложению, в котором есть слова «больше» или «меньше»?

Рассмотрим утверждение:

«У Тани в кармане больше 10 рублей».

Будет ли отрицанием следующее утверждение:

«У Тани в кармане меньше 10 рублей»?

Не будет, так как у Тани в кармане может быть ровно 10 рублей, тогда оба утверждения будут неверными. Правильным отрицанием будет:

«У Тани в кармане меньше или ровно 10 рублей»?

Аналогично можно разобрать и другие случаи и сформулировать правила:

Если утверждение содержит слово «меньше», то для построения отрицания, надо заменить его на «больше или равно» и наоборот.

Если утверждение содержит слово «больше», то для построения отрицания, надо заменить его на «меньше или равно» и наоборот.

3. Как построить отрицание к предложению, в котором есть союз «и»? А если есть союз «или»?

Рассмотрим утверждение: «На завтрак Маша съела кашу и выпила какао». Где здесь ставить частицу «не», чтобы получить отрицание?

Вариант 1: «На завтрак Маша не съела кашу и не выпила какао».

Вариант 2: «На завтрак Маша не съела кашу и выпила какао».

Вариант 3: «На завтрак Маша съела кашу и не выпила какао».

Вариант 1 правильным быть не может. Рассмотрим пример «На завтрак Маша съела кашу и выпила чай». Исходное утверждение неверно, так как не выполнено условие, что Маша выпила какао. Но и вариант 1 является неверным утверждением, так как в нем не выполнено условие, что Маша не съела кашу.

Варианты 2 и 3 тоже не могут быть отрицаниями. Чтобы это понять, рассмотрим пример: «Маша съела омлет и выпила кофе».

Давайте составим таблицу, где по строкам запишем все возможные случаи.

«Маша съела кашу»	«Маша выпила какао»
Правда	Правда
Правда	Ложь
Ложь	Правда
Ложь	Ложь

Если исходное утверждение не является верным (оно записано в строке 1), то верным является одно из оставшихся трех. То есть, отрицанием будет утверждение:

Верно одно из следующих утверждений:

«На завтрак Маша не съела кашу и выпила какао»,

«На завтрак Маша съела кашу и не выпила какао»,

«На завтрак Маша не съела кашу и не выпила какао».

Но в такой форме воспринимать утверждение сложно, хотя полезно понимать разницу между случаями. Посмотрим, что в таблице объединяет строки 2-4 и отличает их от строки 1. Заметим, что в них хотя бы один раз встречается ложь. А в первой строке лжи нет. Можем переписать отрицание в следующем виде:

Верно хотя бы одно из следующих утверждений:

«На завтрак Маша не съела кашу»,

«На завтрак Маша не выпила какао».

Оборот «хотя бы одно» означает одно и больше. Так что верны могут быть оба утверждения.

И окончательный вид отрицания таков:

«На завтрак Маша не съела кашу или не выпила какао».

Союз «или» и несет нужный нам смысл – могут быть верны обе части утверждения выше, а может быть верна только одна.

Чтобы построить отрицание рассуждения с союзом «или», над провести аналогичные рассуждения.

Сформулируем два правила:

Если утверждение состоит из нескольких частей, соединенных союзом «и», то для построения отрицания, надо построить отрицание каждой части утверждения, а между частями поставить союз «или».

Пример: Отрицанием к утверждению «Вася не занимается футболом и любит математику» будет «Вася занимается футболом или не любит математику».

Если утверждение состоит из нескольких частей, соединенных союзом «или», то для построения отрицания, надо построить отрицание каждой части утверждения, а между частями поставить союз «и».

Пример: Отрицанием к утверждению «Катя купит больше 10 карандашей или не сделает домашнее задание по рисованию» будет «Катя купит меньше или ровно 10 карандашей и сделает домашнее задание по рисованию».

4. Как построить отрицание к предложению, в котором есть выражения «каждый» или «хотя бы один» (или синонимы к этим выражениям)?

Рассмотрим утверждение:

«У каждого ученика 3М класса есть велосипед».

Будет ли отрицанием следующее утверждение:

«Ни у одного ученика 3М класса нет велосипеда»?

Рассмотрим ситуацию, когда в классе всего 4 ребенка: Аня, Боря, Ваня, Галя. У Ани и Вани есть по велосипеду, а у Бори и Гали нет велосипеда. Тогда оба указанных выше утверждения не являются верными. Значит мы неправильно построили отрицание.

Рассмотрим все возможные ситуации в классе. Каждая строка – это один вариант. Если в графе стоит «+», то это означает, что у ребенка есть велосипед, а если стоит «−», то нет велосипеда.

Аня	Боря	Ваня	Галя
+	+	+	+
−	+	+	+
+	−	+	+
+	+	−	+
+	+	+	−
−	−	+	+
−	+	−	+
−	+	+	−
+	−	−	+
+	−	+	−
+	+	−	−
+	−	−	−
−	+	−	−
−	−	+	−
−	−	−	+
−	−	−	−

Замечание о заполнении таблицы. Чтобы рассмотреть все случаи будем действовать по следующему алгоритму. В первой строке напишем все плюсы. Дальше рассмотрим варианты, когда минус только один. Дальше рассмотрим варианты, когда минусов два. Перебирать их будем так. Сначала первый минус ставим у первого человека и рассматриваем все варианты для второго минуса. Потом ставим первый минус у второго человека и рассматриваем все варианты для второго минуса, но учитываем, что минус первому ставить уже не можем. И так далее. Далее рассмотрим варианты, когда минусов три. Это означает, что плюсов один. Так что эти варианты симметричны вариантам с одним минусом (надо плюсы поменять на минусы, а минусы на плюсы). И остался вариант со всем минусами.

Всего вариантов 16. Если ситуация в первой строке не является верной, то верна ситуация одной из строк 2-16. Их объединяет между собой и отличает от строки 1 наличие хотя бы одного минуса.

Таким образом, отрицанием будет утверждение:

«Хотя бы у одного ученика 3М класса нет велосипеда».

Чтобы построить отрицание рассуждения с выражением «хотя бы один», надо провести аналогичные рассуждения.

Синонимами к выражению «хотя бы один» являются слова «найдется», «существует», «некоторый» и т.п. А к слову «каждый» синонимами являются слова «всякий», «любой» и т.п.

Сформулируем два правила:

Если утверждение содержит слово «каждый», то для построения отрицания, надо заменить это слово на выражение «хотя бы один» и к остальной части построить отрицание.

Пример: Отрицанием к утверждению «Все школьники любят математику» будет «Существует школьник, который не любит математику» («все» заменили на «существует», «любят» заменили на «не любит»).

Если утверждение содержит выражение «хотя бы один», то для построения отрицания, надо заменить это выражение на слово «каждый» и к остальной части построить *отрицание.*

Пример: Отрицанием к утверждению «В городе есть школа, где не изучают русский язык» будет «В городе во всех школах изучают русский язык» («есть» заменили на «во всех», а «не изучают» на «изучают»).

5. Постройте отрицания к следующим утверждениям:

(a) Некоторые школьники забыли дома голову.

Хотя бы один школьник не забыл дома голову.

(b) Максим решил сегодня все задачи.

Максим не решил сегодня хотя бы одну задачу. (Есть хотя бы одна задача, которую Максим сегодня не решил).

(c) Петя или Яша купили нам печенье.

Петя и Яша не купили нам печенье. (Ни Петя, ни Яша не купили нам печенье)

(d) Шура любит кошек и хурму.

Шура не любит кошек или хурму

(e) Каждый школьник любит шоколад или чипсы.

Есть школьник, который не любит шоколад и чипсы. (Есть школьник, который не любит ни шоколад, ни чипсы.)

(f) Никто из третьеклассников не читал ни Диккенса, ни Дюма.

Есть третьеклассник, который прочитал Диккенса или Дюма.

(g) Хотя бы одна кошка всегда сидит у меня на коленях.

Все кошки в некоторый момент во времени не сидят у меня на коленях. (Есть момент во времени, когда ни одна кошка не сидят у меня на коленях.)

(h) Во всех месяцах года количество дней больше 29.

Есть хотя бы один месяц, в котором количество дней меньше или равно 29.

Замечание. В скобках написан вариант, который несет аналогичный смысл, но больше соответствует правилам русского языка.

6. Учительница сказала: "Каждую задачу решил хотя бы один ученик". Света сказала дома: "Каждый ученик решил хотя бы одну задачу". Правильно ли она поняла слова учительницы?

Решение.

Покажем, что при выполнении условия «Каждую задачу решил хотя бы один ученик», утверждение «Каждый ученик решил хотя бы одну задач» может быть ложным.

Отрицание ко второму утверждению: «Найдется ученик, который не решил ни одной задачи».

Пусть задач было 3. А учеников в классе 4: Алла, Берта, Варя, Гоша.

	Задача 1	Задача 2	Задача 3
Алла	+	−	−
Берта	−	+	−
Варя	−	−	+
Гоша	−	−	−

Здесь первое утверждение выполнено, но есть Гоша, который не решил ни одной задачи.

Ответ: неправильно, приведен контрпример.

■

Решение.

Покажем, что при выполнении условия «Каждую задачу решил хотя бы один ученик», утверждение «Каждый ученик решил хотя бы одну задачу» может быть ложным.

Отрицание ко второму утверждению: «Найдется ученик, который не решил ни одной задачи».

Пусть задач было 3. А учеников в классе 2: Антон и Боря.

	Задача 1	Задача 2	Задача 3
Антон	+	+	+
Боря	−	−	−

Здесь первое утверждение выполнено, но есть Боря, который не решил ни одной задачи.

Ответ: неправильно, приведен контрпример.

■

7. Три путешественника увидели вдали зеленый остров.

- На этом острове больше 1000 пальм! - воскликнул первый.

- Нет, пальм на острове меньше 1000, - возразил второй.

- Ну одна-то пальма точно есть, - сказал третий.

Когда они высадились на берег, оказалось, что только одно из этих утверждений верно. Сколько пальм могло быть на острове?

Решение.

Надо рассмотреть 3 случая.

Случай 1. Первый сказал правду, второй и третий солгали.

Случай 2. Второй сказал правду, первый и третий солгали.

Случай 3. Третий сказал правду, первый и второй солгали.

Сначала построим отрицания.

Отрицание к первому: «На острове меньше или ровно 1000 пальм».

Отрицание ко второму: «Пальм на острове больше или ровно 1000».

Отрицание к третьему: «Нет ни одной пальмы».

Случай 1. Одновременно верно, что на острове больше 1000 пальм и нет пальм. Противоречие.

Случай 2. На острове 0 пальм.

Случай 3. Одновременно верно, что на острове меньше или ровно 1000 пальм и больше или ровно 1000 пальм. Значит, на острове 1000 пальм.

Ответ: 0 или 1000 пальм.

■

Решение.

Надо рассмотреть 2 случая.

Случай 1. Третий сказал правду.

Случай 2. Третий солгал.

Сначала построим отрицания.

Отрицание к первому: «На острове меньше или ровно 1000 пальм».

Отрицание ко второму: «Пальм на острове больше или ровно 1000».

Отрицание к третьему: «Нет ни одной пальмы».

Случай 1. Первый и второй солгали. Поэтому одновременно верно, что на острове меньше или ровно 1000 пальм и больше или ровно 1000 пальм. Значит, на острове 1000 пальм.

Случай 2. На острове 0 пальм. Тогда первый солгал, а второй сказал правду.

Ответ: 0 или 1000 пальм.

■

8. Есть три комнаты, на двери каждой из них — табличка. А написано на табличках вот что:

Комната 1: «Тигр сидит во второй комнате».

Комната 2: «Тигр сидит в этой комнате».

Комната 3: «Тигр сидит в первой комнате».

Написанное на этих табличках может оказаться правдой, а может и нет. В каждой комнате сидит либо принцесса, либо тигр. Тигров может и не быть, а могут везде быть тигры.

(a) Можно ли понять, кто в какой комнате сидит?

(b) Нам подсказали, что принцесса одна, а тигров двое. И табличка на двери, за которой принцесса, – истинна. А из остальных двух табличек по крайней мере одна является ложной. Где находится принцесса?

Решение.

(a) Всего случаев 8. Запишем их в таблицу: «+» означает, что утверждение верно, «−» – что неверно.

Номер случая	Комната 1	Комната 2	Комната 3
1	+	+	+
2	−	+	+
3	+	−	+
4	+	+	−
5	+	−	−
6	−	+	−
7	−	−	+
8	−	−	−

Сначала построим отрицания.

Комната 1: «Во второй комнате не тигра», что означает «Во второй комнате принцесса».

Комната 2: «В этой комнате нет тигра», что означает «В этой комнате принцесса».

Комната 3: «В первой комнате нет тигра», что означает «В первой комнате принцесса».

Случай 1. 1 – тигр, 2 – тигр, 3 – неизвестно.

Случай 2. Одновременно во второй комнате есть и нет тигра. Противоречие.

Случай 3. Одновременно во второй комнате есть и нет тигра. Противоречие.

Случай 4. 1 – принцесса, 2 – тигр, 3 – неизвестно.

Случай 5. Одновременно во второй комнате есть и нет тигра. Противоречие.

Случай 6. Одновременно во второй комнате есть и нет тигра. Противоречие.

Случай 7. 1 – тигр, 2 – принцесса, 3 – неизвестно.

Случай 8. 1 – принцесса, 2 – принцесса, 3 – неизвестно.

Ответ: ни про одну комнату не можем сказать, кто в ней сидит.

(b) Если принцесса одна, а тигров двое, то:

Случай 1. 1 – тигр, 2 – тигр, 3 – принцесса.

Случай 4. 1 – принцесса, 2 – тигр, 3 – тигр.

Случай 7. 1 – тигр, 2 – принцесса, 3 – тигр.

Случай 8. Противоречие, так как принцесс уже две.

На табличке на двери, где сидит принцесса, написана истина, поэтому исключаем случай 7.

Из остальных двух табличек, хотя бы одна ложна, поэтому исключаем случай 1.

Ответ: принцесса сидит в комнате 1.

■

Решение.

(a) Заметим, что утверждения на комнатах 1 и 2 означают одно и то же.

Поэтому надо рассмотреть 2 случая.

Случай 1. Во второй комнате тигр.

Случай 2. Во второй комнате принцесса.

Сначала построим отрицания.

Комната 1 и 2: «Во второй комнате не тигра», что означает «Во второй комнате принцесса».

Комната 3: «В первой комнате нет тигра», что означает «В первой комнате принцесса».

Случай 1. Комната 1 – неизвестно, зависит от комнаты 3, Комната 2 – тигр, Комната 3 – неизвестно.

Случай 2. 1 – неизвестно, зависит от комнаты 3, 2 – принцесса, 3 – неизвестно.

Ответ: ни про одну комнату не можем сказать, кто в ней сидит.

(b) Если принцесса одна, а тигров двое, то:

Случай 1 распадается на 2 случая.

Случай 1а. 1 – принцесса, 2 – тигр, 3 – тигр.

Случай 1б. 1 – тигр, 2 – тигр, 3 – принцесса.

Случай 2. 1 – тигр, 2 – принцесса, 3 – тигр.

Случай 1а подходит подо все условия задачи.

Случай 1б. Все три утверждения верны, что противоречию условию, что хотя бы одна табличка с ложным утверждением.

Случай 2. Табличка на комнате 2 должна быть истиной, раз там сидит принцесса, а это не так.

Ответ: принцесса сидит в комнате 1.

■