Дифференциальные неравенства

Автор : Верещагина Софья
Руководитель: Сергей Михайлович Горский

СОДЕРЖАНИЕ

Автор

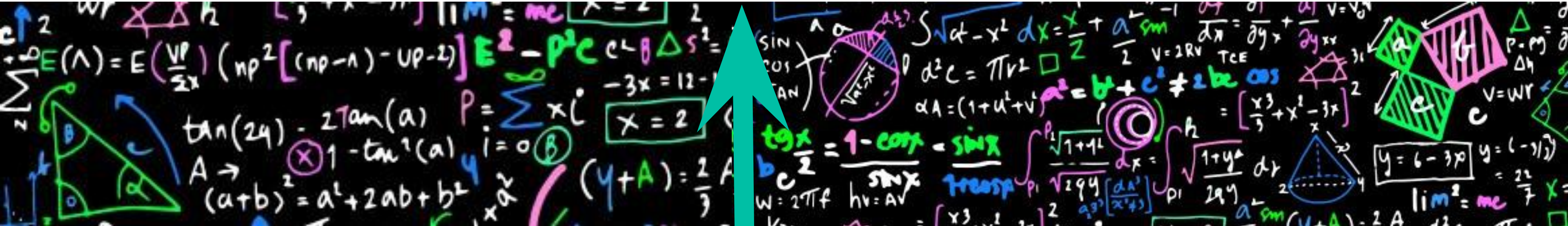
Верещагина Софья Сергеевна
Ученица 10 класса
Санкт-Петербургский национальный исследовательский Академический университет Российской академии наук, Лицей “Физико-техническая школа” имени Ж.И. Алфёрова

Цель проекта

В данной работе делаются попытки найти явным образом все решения нестрогого дифференциального неравенства второго порядка с постоянными коэффициентами.

Список использованных источников

Ильин Ю.А. Общие вопросы интегрирования дифференциальных неравенств в явном виде // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 597--607.



Определения

Определение 1. Функцию $x(t)$, определенную на промежутке $\langle a, b\rangle$, будем называть *решением неравенства* (1), если выполнены следующие условия: 1) $x(t) \in C^1(\langle a, b\rangle)$; 2) график $x(t)$ лежит в G при $t \in \langle a, b\rangle$; 3) выполняется $\dot{x}(t) \leqslant f(t, x(t))$ $\forall t \in \langle a, b\rangle$. G- некоторая область, $G \subset R^2$

Замечание. Данное определение запрещает производной функции принимать бесконечные (несобственные) значения. Но можно допустить решения, определенные на $[a, b]$ и имеющие в точках a и b односторонние производные, равные $-\infty$.

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (1)$$

область G будет областью существования и единственности. Напомним определение общего решения дифференциального уравнения.

Определение 2. Функция

$$x = F(t, C) \qquad (2)$$

называется *общим решением уравнения* (1) *в области* $A \subseteq G$, если выполнены следующие условия:

1) F определена в области $B \subset \mathbb{R}^2$, причем отображение $(t, F(t, C)) : B \mapsto A$ является биекцией;

2) $F \in C^1(B)$, причем $F'_C \neq 0$;

3) при каждом C из области определения функции F формула (2) задает одно решение уравнения (1), определенное на некотором интервале (a_c, b_c);

4) для любого решения $x(t)$ уравнения (1), график которого лежит в A, существует такое C, что $x(t) \equiv F(t, C)$.

Хорошо известно [1], что при сделанных относительно f предположениях общее решение будет локально существовать в окрестности любой точки из G (но не обязано существовать во всей области G).

Решение дифференциального уравнения первого порядка

y’ + p(x)y= q(x) , где p(x) и q(x) - известные функции, y - неизвестная дифференцируемая функция от x

Пусть y= u(x)v(x)

u’v + uv’+p*uv= (u’+ p*u)v + uv’=q

Мы хотим, чтобы u’+ p*u =0. Заметим, что одну из функций u, v мы можем выбрать любую. Вторая определится через первую для получения изначальной функции y. Подберем u, подходящее нашим условиям

u’=-pu ; $\frac{du}{dx}$ =- pu ; $\frac{du}{u}$ =-pdx Возьмем интеграл обоих частей

u(x) = $e^{-\int p(x)dx}$; v’= $q(x)e^{\int p(x)dx} + c$; v= $\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$

Итого y(x) = $e^{-\int p(x)dx}(c + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)$

Решение линейного однородного дифференциального уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами

Случай с различными действительными корнями характеристического уравнения

решением являются функции вида $c_1e^{k_1t} + c_2e^{k_2t}$, где c_1 и c_2 –константы,

$к_1$ и $к_2$ – корни характеристического уравнения (обязательно различные)

Случай, когда характеристическое уравнение имеет один корень

решением являются функции вида $(c_1t + c_2)e^{kt}$, где c_1 и c_2 –константы,

k – Единственный корень характеристического уравнения

Случай с комплексными корнями характеристического уравнения

решением являются уравнения $x(t) = e^{\alpha t}(c_1 sin\beta t + c_2 cos\beta t)$,

где корни характеристического уравнения $\alpha \pm \beta i$, c_1 и c_2 –константы

Метод Ильина

В статье рассматривается задача отыскания явным образом всех решений нестрогого дифференциального неравенства первого порядка. При этом используется формула общего решения соответствующего дифференциального уравнения. С помощью аналога метода вариации произвольной постоянной или, другими словами, выпрямляющего диффеоморфизма исходное неравенство сводится к простейшему $\dot{x} \leqslant 0$ или $\dot{x} \geqslant 0$.

Иными словами, сначала ищется общее решение уравнения x = F(t,C) и делается замена переменных в неравенстве. (t,x) → (t,C) , то есть представляем константу c как функцию.Далее неравенство сводится к

$c \leq 0$($c(t)$ − произвольная гладкая невозрастающая)
либо $c \geq 0$ ($c(t)$ произвольная гладкая неубывающая функция)

Также стоит заметить, что теория продолжимости решений дифференциальных уравнений не переносится на решения дифференциальных неравенств. Так как во многих функциях нарушается гладкость в окрестностях некоторых точек, следовательно, функции в данных точках как решение дифференциальных уравнений неприменимы. Однако в неравенствах они допускаются

Проблемы

1. Продолжимость (то есть промежутком определения) решений

2. Возможность того, что общее решение уравнения может состоять из нескольких функций, заданных на разных промежутках из области определения уравнения

3. Наличие у уравнения точек ветвления.В этом случае метод теорем сравнения не применим.

Другие подходы к решению неравенств

Существуют еще также другие методы решения дифференциальных неравенств

- Теоремы сравнения или, иначе, метод Чаплыгина. Суть этого метода заключается в том, что решения неравенства не ищутся явно, а лишь оцениваются с помощью решений уравнений сравнения. В данном случае обычно исследуют положительные функции и происходит довольно грубая оценка
- Оценка для решения неравенства доказывается прямым интегрированием неравенства с помощью интегрирующего множителя. В таком подходе может возникнуть необходимость рассматривать много случаев.
- Добавление к неравенству функции такой, которая превратит его в равенство. Далее , решая полученное уравнение, найти условия на добавленную функцию

Заметим, что, к сожалению Ю.А.Ильин, предоставляя способ решения дифференциальных неравенств, разобрал случай только неравенства первого порядка. В то время как неравенства более высоких порядков также представляют интерес. Возможно, это объясняется тем, что неравенства высших порядков применяются не так часто, как первого, а прикладные задачи реже решаются с их помощью.

Метод Ильина позволяет рассматривать различные неравенства единообразно и получать разные оценки по единому алгоритму. В данной работе на основе этого метода делается попытка найти явные решения уравнений второго порядка и систем уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями, что не было сделано ранее в никаких источниках.

Решение дифференциального неравенства второго порядка

$$x'' - (k_1 + k_2)x' + k_1 k_2 x \le 0.$$

Решим данное неравенство.

1) Характеристическое уравнение имеет действительные корни k_1 и k_2
   Первая возникающая сложность - то, что дифференциальные уравнения имеют два различных фундаментальных решения. Поэтому возникает вопрос, какую из констант с считать за функцию.
   Считать их обе за функции будет сложно найти условия на c_1 и c_2.
   Пусть только c_1 будет представлена как функция
   Возьмем первый фундаментальный корень уравнения (НУО $k=k_1$)
   $x(t)= ce^{kt}$, k – один из корней; $c=c(t)$;
   $x'(t) = c'e^{kt} - cke^{kt}$; $x''(t) = c''e^{kt} - 2c'ke^{kt} + ck^2 e^{kt}$
   Подставим в неравенство.
   $c''e^{kt} - 2c'k_1e^{kt} + ck_1^2 e^{kt} + (k_1+k_2)\, c'e^{kt} - (k_1+k_2)\, ck_1e^{kt} + k_1k_2ce^{kt} \le 0$
   Так как $e^{kt} > 0$, то на него можно разделить и при этом неравенство не поменяет знак.
   $c'' + c'(k_2-k_1) \le 0$

По статье Ильина заменяем на равенство. Также пусть $c' = F(t)$

$F' = \frac{dF}{dt} = (k_1 - k_2)F$; $\frac{dF}{F} = (k_1 - k_2)\,dt$; Возьмем интеграл

$\ln(F) = (k_1 - k_2)t$; $F = e^{(k_1-k_2)t}D$; $D = D(t)$; Подставим это в наше неравенство

$D' e^{(k_1-k_2)t} + e^{(k_1-k_2)t} D(k_1 - k_2) \le e^{(k_1-k_2)t}(k_1 - k_2)$

$D' \le 0$ Таким образом, D – произвольная невозрастающая дифференцируемая функция

Получаем, что $c' = e^{(k_1-k_2)t}D$; $c(t) = \int_{t_0}^{t} D\, e^{(k_1-k_2)s} ds$;

$$\boxed{x(t) = e^{k_1 t} \int_{t_0}^{t} D\, e^{(k_1-k_2)s} ds}$$

Заметим, что для второго решения уравнения проводятся аналогичные рассуждения и получается тот же ответ, отличающийся степенью e и функцией c(t).

Также с определенным условием на c_1 мы можем получить второе фундаментальное решение изначального уравнения. Следовательно, не зависимо от выбора искомой функции у нас получится всегда один и тот же ответ, и мы нашли общее решение неравенства.

Иными словами, пусть $\varphi(t)$ – произвольное решение дифференциального неравенства. Тогда оно представимо в виде $\varphi(t) = e^{kt}\int_{t_0}^{t} D\, e^{(k_1-k_2)s} ds$

$$\varphi'(t) = De^{(k_1-k_2+k)t}$$

$$\frac{\varphi'(t)}{e^{(k_1-k_2+k)t}} = D$$

Таким образом, зная произвольное решение мы можем найти функцию D. Также

$$D' = \frac{\varphi'' e^{(k_1-k_2+k)t} - \varphi\prime(k_1-k_2+k)e^{(k_1-k_2+k)t}}{e^{2(k_1-k_2+k)t}} = \frac{\varphi'' - \varphi\prime(k_1-k_2+k)}{e^{(k_1-k_2+k)t}} \leq 0\ .$$

Это верно, так как знаменатель этой дроби всегда положительный, а числитель отрицательный (это следует из того, что φ – решение уравнения).

Значит, имя произвольное решение мы можем явно выразить с

2) Характеристическое уравнение имеет один действительный корень k

В этом случае работают аналогичные рассуждения, что в пункте 1. Также пропадает проблема изначального выбора с для представления ее как функции. Таким образом, решения дифференциального неравенства в таком случае представимы в виде

$\boxed{x\,(t) = e^{kt}\int_{t_0}^{t} D\, ds}$

$$x'' + px' + qx \leq \ 0.$$

3) Характеристическое уравнение имеет комплексные корни $\alpha \pm \beta i$

Возьмем корень в случае равенства x(t)=$ce^{\alpha t}cos\beta t$; c=c(t)

x' (t) =$c'cos\beta te^{\alpha t} + c\alpha e^{\alpha t}cos\beta t - \ c\beta e^{\alpha t}sin\beta t;$

x'' (t) =c''$cos\beta te^{\alpha t} + 2c'\alpha e^{\alpha t}cos\beta t - 2c'\beta e^{\alpha t}sin\beta t + c\alpha^2 e^{\alpha t}cos\beta t$ - $2c\alpha\beta e^{\alpha t}sin\beta t - c\beta^2 e^{\alpha t}cos\beta t$

Подставляем в неравенство и делим на $e^{\alpha t}$. При этоsм заметим, что p=2α; q=$\alpha^2 + \beta^2$

c''$cos\beta t + 2c'\alpha cos\beta t - 2c'\beta sin\beta t + c\alpha^2 cos\beta t - 2c\alpha\beta sin\beta t - c\beta^2 cos\beta t - 2c'\alpha cos\beta t$ - $2c\alpha^2 cos\beta t$+

+ $2c\alpha\beta sin\beta t$ +$c\alpha^2 cos\beta t$+ $c\beta^2 cos\beta t \leq 0$

c'' cosβt – 2c'sinβt ≤ 0

Заменим c'= F. Также по статье Ильина заменяем на равенство.

F'= $\frac{dF}{dt} = \frac{2\beta sin\beta tF}{cos\beta t} = 2\beta tg\beta tF;\ \ \frac{dF}{F} = 2\beta tg\beta tdt$. Возьмем интеграл обоих частей

ln (F) = -2 ln (cosβt)

F = $\frac{1}{cos^2\beta t}D$; D- функция от t. Подставляем в наше неравенство.

$$\frac{1}{cos\beta t}D' + \frac{2\beta sin\beta t}{cos^2\beta t}D \le \frac{2\beta sin\beta t}{cos^2\beta t}D$$

$$\frac{1}{cos\beta t}D' \le 0$$

Таким образом,

$$\boxed{x(t) = e^{\alpha\, t}\, cos\,\beta\; t\, \int_{t_0}^{t} \frac{D(s)}{cos^2\,\beta s}\mathrm{d}s}$$

является решением дифференциального неравенства , где D(s) —произвольная дифференцируемая невозрастающая функция и удовлетворяющая условию $\frac{D'(\mathrm{t})}{\cos\beta\mathrm{t}} \le 0$ и $\frac{\mathrm{D(s)}}{\cos^2\beta\mathrm{s}}$ интегрируема.

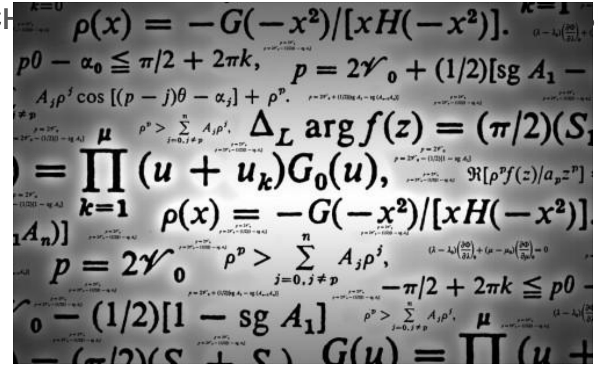
Вывод (1)

Таким образом, по методу Ильина мы разобрали алгоритм решения дифференциальных уравнений второй степени. В планируемом продолжении работы с его помощью можно разобрать решение некоторых широко известных уравнений. Рассмотрим преимущества данного метода.

Плюсы использования метода Ильина перед добавлением неизвестной функции для получения равенства:

1. При добавлении неизвестных функций возникают сложности со взятием интеграла, в решении Ильина этого не происходит.
2. При добавлении неизвестных функций происходит нагромождение выражения, что усложняет работу и поиск условий на используемые функции
3. При некоторых “плохих” функциях правой части, которые не попадают под стандартный вид, частное решение ищется очень сложно. И способ его найти - метод неопределенных коэффициентов, то есть нужно решать через метод Ильина. Таким образом, данный способ делает решение более понятным и сокращает объем работы.

4. Способом Ильина мы можем решать дифференциального неравенства высокого порядка. При взятии фундаментального решения, домноженного на константу, которую считаем функцией, мы понижаем порядок неравенства. Таким образом, мы можем решить любое однородное неравенство любой степени при условии, что мы знаем его корни. Однако существует проблема, заключающаяся в том, что все фундаментальные корни окажутся комплексными. В таком случае при уменьшении степени неравенства у нас возникнет мнимая часть в неравенстве, с которой мы еще не научились работать. Это является интересн нейшем



Решение систем дифференциальных неравенств первого порядка путем добавления неизвестных функций

$$\begin{cases} x' \le \alpha x + \beta y \\ y' \le \gamma x + \delta y \end{cases}$$

Прибавим к каждому неравенству неизвестные функции, чтобы превратить в равенства.

$$\begin{cases} x' + f(t) = \alpha x + \beta y \\ y' + g(t) = \gamma x + \delta y \end{cases}$$

$$y = \frac{x' + f(t) - \alpha x}{\beta}; \;\; y' = \gamma x + \delta \frac{x' + f(t) - \alpha x}{\beta} - g(t)$$

$$\frac{\delta}{\beta} x' + \frac{\gamma\beta - \alpha}{\beta} x + \frac{\delta}{\beta} f(t) - g(t) = y'; \;\; x' + \frac{\gamma\beta - \alpha}{\delta} x = \frac{\beta}{\delta} g(t) + f(t) + y'$$

Пусть $\frac{\beta}{\delta} g(t) + f(t) + y' =$ q(x). Теперь наше уравнение имеет вид $x' + \frac{\gamma\beta - \alpha}{\delta} x = q(t)$, что мы умеем решать x(t)=$e^{\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t}(c+\int q(x)e^{\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t}dt)$

x(t)= $e^{\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t}(c+\int(\frac{\beta}{\delta}g(t)+f(t)+y')\,e^{\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t}dt)$

Подставляем в уравнение y’= $\gamma x+\delta\frac{x'+f(t)-\alpha x}{\beta}-g(t)$

$$y'=\frac{c_1+2(\gamma\beta-\alpha)*e^{\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t}\int((\frac{\beta}{\delta}g(t)+f(t)+y')\,e^{\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t}dt)+\beta g(t)(e^{2\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t}-1)+\delta f(t)(e^{2\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t}-\alpha)}{\beta-\delta e^{2\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t}}$$

, где c_1 – новая константа

Итого решение системы выглядит как:

$$y(t) = \int \frac{c_1 + 2(\gamma\beta - \alpha) * e^{\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t} \int ((\frac{\beta}{\delta} g(t) + f(t) + y') \, e^{\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t} dt) + \beta g(t)(e^{2\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t} - 1) + \delta f(t)(e^{2\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t} - \alpha)}{\beta - \delta e^{2\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t}}$$

$$x(t) = e^{\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t}(c + \int (\frac{\beta}{\delta} g(t) + f(t) + y') \, e^{\frac{\gamma\beta-\alpha}{\delta}t} dt)$$

Заметим, что данный вид очень неудобен для работы. Попробуем решить систему с помощью метода Ильина

Также из-за большого количества функций сложно сказать о необходимых условиях добавленных нами функций. Однако точно можно сказать, что они должны быть дифференцируемы

Решение систем дифференциальных неравенств первого порядка путем

$$\begin{cases} x' \le \alpha x + \beta y & (1) \\ y' \le \gamma x + \delta y & (2) \end{cases}$$

Из (1) неравенства получаем, что $y \ge \frac{x' - \alpha x}{\beta}$. Заменяем по статье Ильина на равенство.

$y' = \frac{x"}{\beta} - \frac{\alpha x'}{\beta}$. И подставляем в неравенство (2). Получается:

$$\frac{x"}{\beta} - \frac{\alpha x'}{\beta} \le \gamma x + \frac{\gamma x' - \alpha \gamma x}{\beta}$$

$$x" + (\gamma - \alpha)x' + \gamma(\alpha - \beta)x \le 0 \text{ (при положительном } \beta)$$

В противном случае, при $\beta < 0$, домножим каждую переменную на -1 и придем к тому же результату

Таким образом, система неравенств свелась к дифференциальному неравенству второго порядка, которое мы уже умеем решать.

- Для случая, когда показательное уравнение имеет действительные корни

Для x мы получаем фундаментальные решения x(t)= $e^{k_1 t}\int_{t_0}^{t} D\, e^{(k_1-k_2)s} ds$ (от двух переменных c_1 и c_2).
Действуем по той же схеме (берем решение от первого фундаментального решения)

Тогда $y(t) = \dfrac{e^{(2k_1-k_2)t}D - \alpha e^{k_1 t}\int_{t_0}^{t} De^{(k_1-k_2)s}ds}{\beta}$; $y' = \dfrac{D'e^{(2k_1-k_2)t} + (2k_1-k_2-\alpha)e^{(2k_1-k_2)t}D}{\beta}$

Подставляем в систему неравенств.

$$\begin{cases} e^{(2k_1-k_2)t}D \le \alpha e^{k_1 t}\displaystyle\int_{t_0}^{t} D\, e^{(k_1-k_2)s}ds + \dfrac{\beta\left(e^{(2k_1-k_2)t}D - \alpha e^{k_1 t}\int_{t_0}^{t} D\, e^{(k_1-k_2)s}ds\right)}{\beta} \\ \dfrac{D'e^{(2k_1-k_2)t} + (2k_1-k_2-\alpha)e^{(2k_1-k_2)t}D}{\beta} \le \gamma e^{k_1 t}\displaystyle\int_{t_0}^{t} D\, e^{(k_1-k_2)s}ds + \dfrac{\delta\left(e^{(2k_1-k_2)t}D - \alpha e^{k_1 t}\int_{t_0}^{t} D\, e^{(k_1-k_2)s}ds\right)}{\beta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{(2k_1-k_2)t}D \le e^{(2k_1-k_2)t}D \quad (3) \\ D' e^{(2k_1-k_2)t} \le (\gamma\beta - \alpha\delta)e^{k_1 t}\displaystyle\int_{t_0}^{t} D\, e^{(k_1-k_2)s}ds + (\delta - k_1 + k_2 + \alpha)e^{(2k_1-k_2)t}D \quad (4) \end{cases}$$

Третье неравенство превращается всегда в равенство и верно, значит, условие на D на задает неравенство (4)

Получается, необходимые условия на D:

$D' - (\gamma\beta - \alpha\delta)e^{(k_2-k_1)t}\int_{t_0}^{t} D\, e^{(k_1-k_2)s}ds - (\delta - k_1 + k_2 + \alpha)D \leq 0$, D –невозрастающая дифференцируемая функция

Но заметим, что, решая таким способом, мы не можем гарантировать, что нашли все решения системы неравенств. Так как, когда мы берем второе фундаментальное решение, мы получим решение, отличное от полученных решений от первого фундаментального решения уравнения.

Приведем пример такой ситуации.

$$\begin{cases} y' \le x & (5) \\ x' \le y & (6) \end{cases}$$

Неравенство (5) по статье Ильина заменяем на равенство. Тогда y'=x; x'= y''. Подставляем в неравенство.(5) превращается в равенство всегда. В (6):

$y'' \le y; y'' - y \le 0$; По статье Ильина решаем как уравнение. Фундаментальные решения f(t) = $c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, где c_1 и c_2 –константы. Значит, решение неравенства представимо в виде y(t)= $e^t \int_{t_0}^{t} D\, e^{2s} ds$ (когда мы представляем c_1 как функцию и берем первое фундаментальное решение)

У нас получаются общее решение $\begin{cases} x = e^{3t} D \\ y = e^t \int_{t_0}^{t} D\, e^{2s} ds \end{cases}$, но заметим, что ситуация, когда x и y – положительные константы, тоже является решением. Например, x=2, y=5 являются решением данной системы, однако они не выражается из общего решения, полученного нами

Вывод (2)

 В данном случае мы сравнили еще раз возможные методы решения неравенств и убедились, что добавление неизвестных функций может вызвать большие сложности в решении, невозможность взятия интегралов и, как следствие из этого, нагромождение вычислений

Метод Ильина помогает же сократить вычисления и использовать старые знания для получения решения новых неравенств (система неравенств первого порядка свелась к неравенству второго порядка). Значит, можно предположить, что также работает идея решения систем уравнений более высокого порядка. Мы сводим их к неравенству от одной переменной, которое на порядок выше исходного, и уже дальше решаем последнее, как было предложено в выводе(1).

Однако проблема, заключающаяся в этом способе, заключается в том, что необходимо рассматривать все фундаментальные решения, так как они могут давать разные

Спасибо за внимание!