

Периодические бильярдные траектории в правильном шестиугольнике

Выполнила:

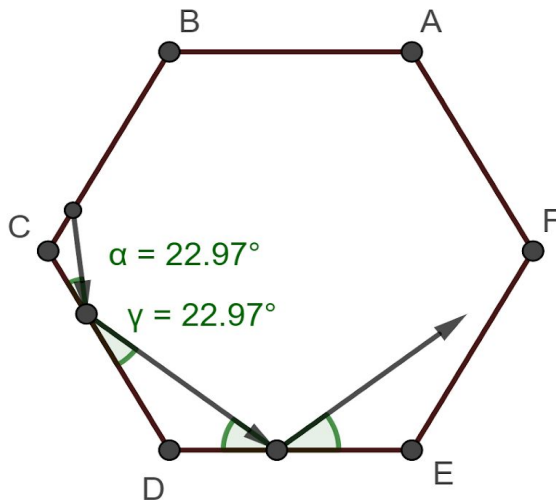
Барышева Зарина Александровна, ученица 11А класса МОУ
“Университетского лицея”

Научный руководитель:

Алькин Руслан Валерьевич, преподаватель ПетрГУ, Институт математики и информационных технологий, Кафедра прикладной математики и кибернетики

Бильярд в шестиугольнике

- Объект исследования - бильярдные траектории в правильном шестиугольнике.
- Предмет исследования - условия периодичности траекторий.



Цели и задачи работы

Цель:

Изучение механизмов построения всех n -звенных периодических бильярдных траекторий в правильном шестиугольнике, их комбинаторных свойств и описание алгоритма их подсчета.

Задачи:

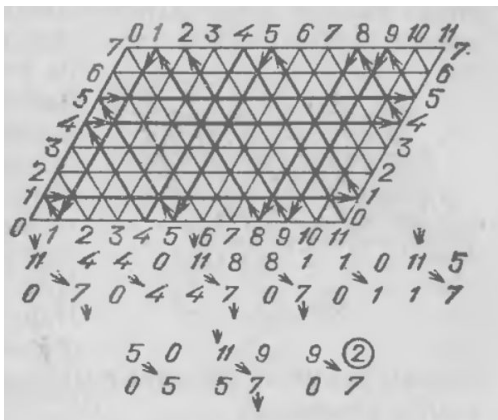
1. Изучение существующих методов решения подобных задач в теории математического бильярда.
2. Введение собственного математического аппарата для облегчения решения задачи.
3. Разработка алгоритма построения и подсчета периодических n -звенных бильярдных траекторий в правильном шестиугольнике.
4. Поиск закономерностей и выведение формул количества периодических n -звенных траекторий.

Структура и методы исследования

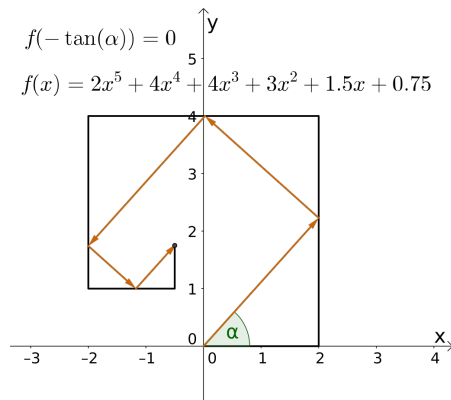
1. Анализ тематической литературы и существующих методов решения подобных задач;
2. Разработка собственного способа кодирования;
3. Определение необходимых свойств кода для развертки периодической n -звенной траектории;
4. Разработка алгоритма перебора разверток периодических n -звенных траекторий;
5. Вычисление временной сложности работы алгоритма;
6. Реализация разработанного алгоритма;
7. Анализ результатов;
8. Вывод аналитической формулы количества периодических n -звенных траекторий;
9. Исследование возможности обобщения предложенных методов.

Применение бильярдov

- Задача о переливаниях
- Задача Фаньяно
- Метод Лиля
- Кодирование информации



Пример решения задачи
на переливания

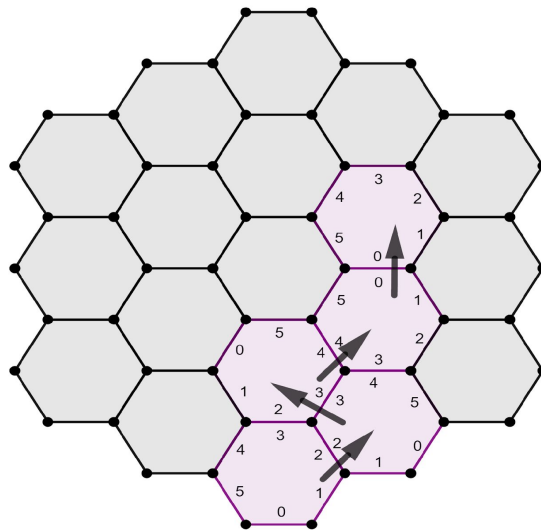
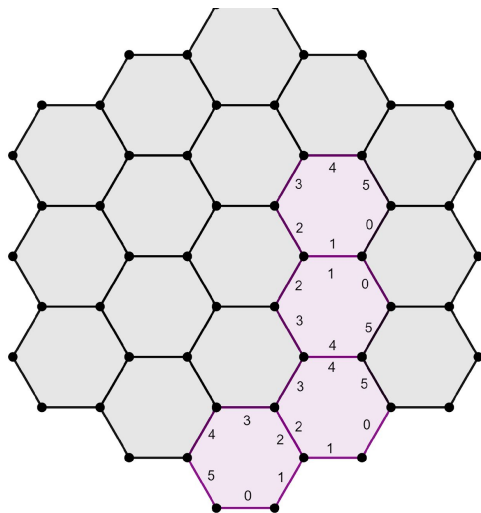


Пример графического решения уравнения

Некоторые существующие проблемы:

1. Критерий существования периодических бильярдных траекторий в тупоугольном треугольнике.
2. Алгоритмизация поиска периодических траекторий в правильном шестиугольнике.

Гексагональная решетка



Кодирование траекторий. Операция *

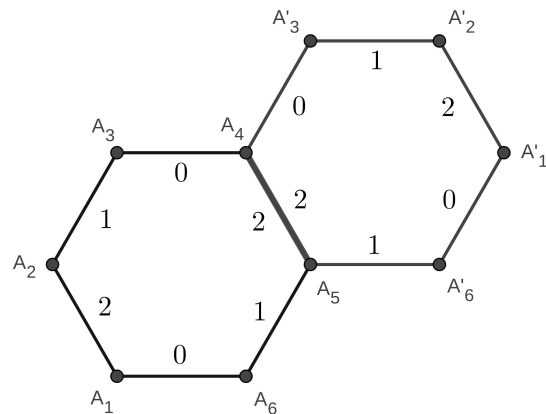
Лемма 1.

В выражении $a*b = c$ для определенных a и b значение c всегда однозначно.

Лемма 2.

Сумма a , b и c в выражении $a*b = c$ кратна 3.

$a*b \equiv (6 - a - b) \pmod{3}$ - тип стороны, которая оказалась на месте стороны типа a при отражении шестиугольника через сторону типа b



Кодирование траекторий. Алгебраический код

Алгебраический код - последовательность чисел $a[0]..a[n]$, где $a[0]$ есть тип начальной стороны, а $a[i]$, при $i \in [1..n]$, - тип стороны, отражением через которую получился шестиугольник $H[i]$.

Лемма 3.

Последовательность является алгебраически хорошей, когда выполняются следующие условия:

1. длина последовательности нечётна;
2. операция $*$ на последовательности $(a[0] * a[1] * a[2] * .. * a[n]) = a[0]$;
3. $a[0] = a[n]$;

Кодирование траекторий. Алгебраический код

Теорема 3.

Количество алгебраически хороших кодов для n -звенной периодической траектории без учета последовательности, состоящей только из нулей:

$$f(n) = 3^{n-2} - \sum_{d \in D} f(d) - 1$$

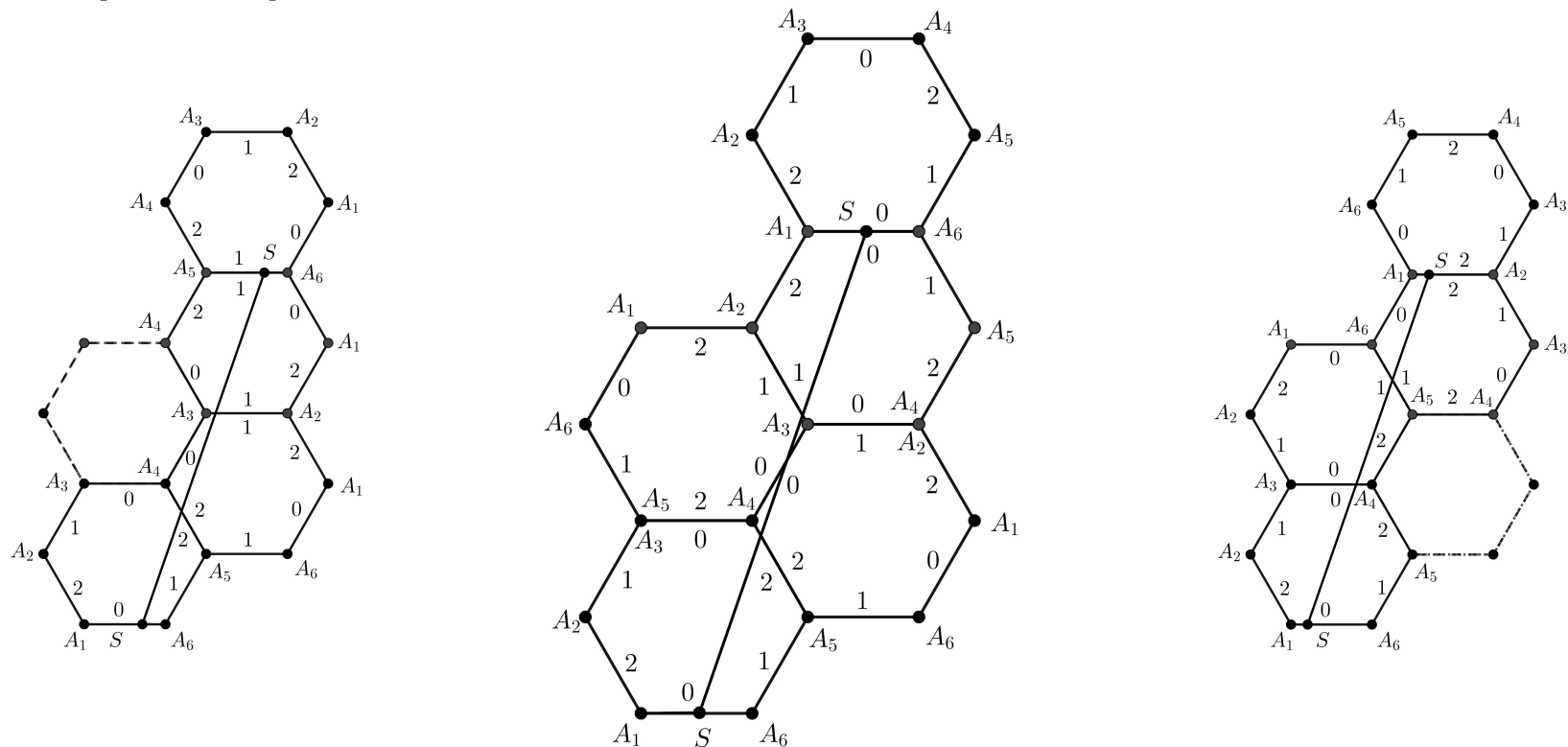
n - количество звеньев траектории;

$f(n)$ – количество алгебраически хороших кодов для разверток n -звенных траекторий без учета последовательности из всех нулей;

D - множество делителей числа n , не включая 1 и n .

Кодирование траекторий. Алгебраический код.

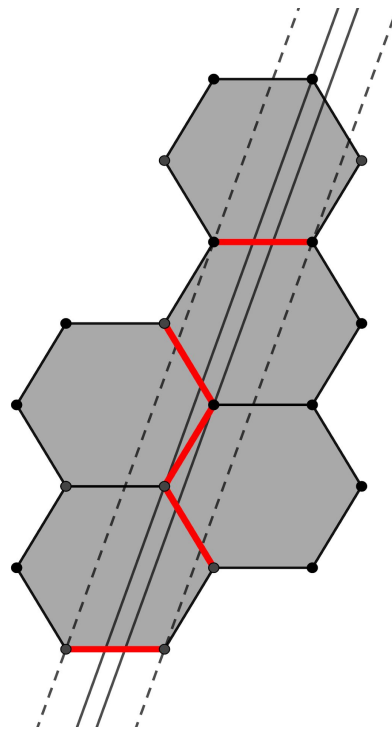
Примеры



Кодирование траекторий. Критерий выбора

Лемма 5.

Коридор существует, если существуют более одной параллельной прямой, проходящей через соответствующие точки начальной и конечной сторон, а также пересекающие все стороны отражения.

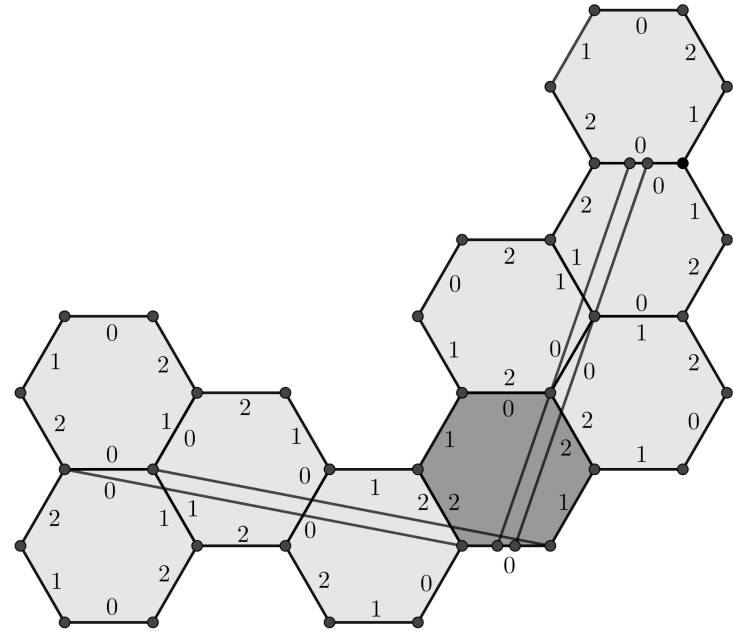


Кодирование траекторий. Геометрические интерпретации алгебраических кодов

Хороший алгебраический код:

0 2 0 1 0

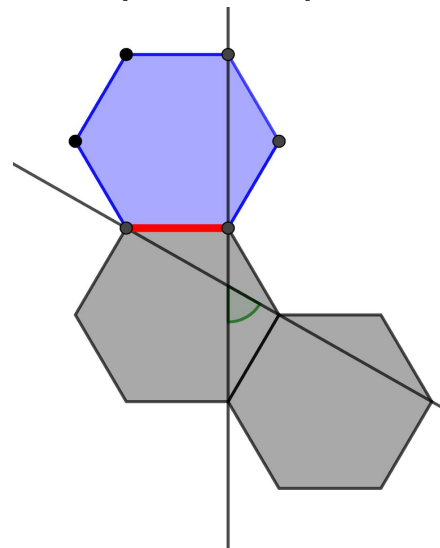
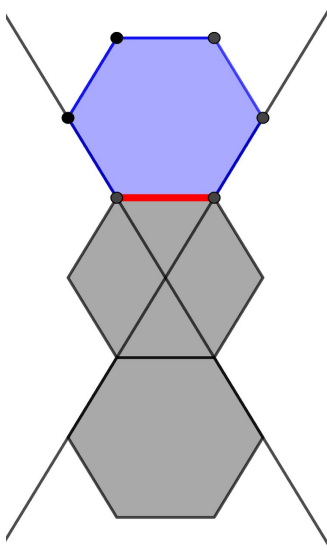
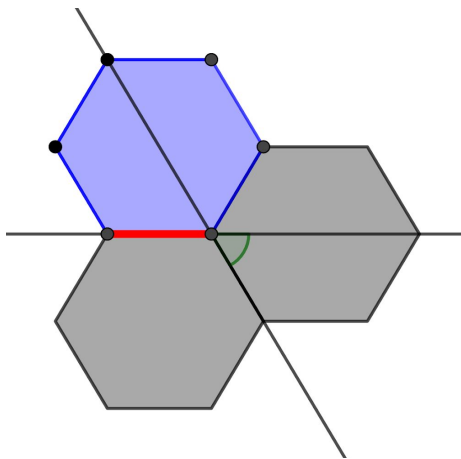
Существующие корректные
геометрические интерпретации:



Кодирование траекторий. Геометрические интерпретации алгебраических кодов

Теорема 2.

Алгебраически хороший код имеет не более одной корректной геометрической интерпретации для зафиксированного первого отражения.



Кодирование траекторий. Описание алгоритма

Алгоритм состоит из 3 фаз:

1. Генерация алгебраически хороших последовательностей;
2. Построение последовательности отражений для найденных алгебраически хороших кодов;
3. Проверка геометрической интерпретации на корректность.

Кодирование траекторий. Реализация

Модули: Алгебраический; Геометрический.

Классы геометрического модуля: Точка; Отрезок; Шестиугольник; Прямая.

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 #include "geometry_functions.cpp"
3 using namespace std;
4
5 void start_sequence()
6 {
7     point v[5];
8     v[0] = point(0, 0);
9     v[1] = v[0] + point(L, 0);
10    v[2] = v[1] + point(L/2, sqrt(3)/2);
11    v[3] = v[2] + point(0, sqrt(3));
12    v[4] = v[3] + point(-L/2, sqrt(3)/2);
13    v[5] = v[0] + point(L/2, sqrt(3)/2);
14    hex_seq[0] = hex(v);
15    //cnt = 0;
16}
17
18 void sequence(int j = 1)
19 for(int i = 0; i <= i+1; i++)
20 if(i != hex_seq[j-1] && hex_seq[j])
21 id[i] = i;
22 // cout << j << " " << id[j] << " " << endl;
23 hex_seq[j] = hex_seq[j-1] * id[j];
24
25 if(j%3 != 0)
26 sequence(j+1);
27
28 //cerr << "now will geometry"
29 //for(int p = 0; p < n; p++)
30 // cout << id[p] << " " << endl;
31 //
32 //cerr << "now try to check"
33 pair<double, double> hall =
34 for(int i = 0; i < n; i++)
35 cerr << id[i] << " " << endl;
36
37 //
38 if(hall.first < hall.second
39 //cout << hall.first << endl;
40 //for(int p = 0; p < n; p++)
41 // cout << id[p] << " " << endl;
42 //cout << endl;
43
44 //
45 //
46 //
47 //
48 //
49 //
50 //
51 //
52 //
53 //
54 //
55 //
56 //
57 //
58 //
59 //
60 //
61 //
62 //
63 //
64 //
65 //
66 //
67 //
68 //
69 //
70 //
71 //
72 //
73 //
74 //
75 //
76 //
77 //
78 //
79 //
80 //
81 //
82 //
83 //
84 //
85 //
86 //
87 //
88 //
89 //
90 //
91 //
92 //
93 //
94 //
95 //
96 //
97 //
98 //
99 //
100 //
101 //
102 //
103 //
104 //
105 //
106 //
107 //
108 //
109 //
110 //
111 //
112 //
113 //
114 //
115 //
116 //
117 //
118 //
119 //
120 //
121 //
122 //
123 //
124 //
125 //
126 //
127 //
128 //
129 //
130 //
131 //
132 //
133 //
134 //
135 //
136 //
137 //
138 //
139 //
140 //
141 //
142 //
143 //
144 //
145 //
146 //
147 //
148 //
149 //
150 //
151 //
152 //
153 //
154 //
155 //
156 //
157 //
158 //
159 //
160 //
161 //
162 //
163 //
164 //
165 //
166 //
167 //
168 //
169 //
170 //
171 //
172 //
173 //
174 //
175 //
176 //
177 //
178 //
179 //
180 //
181 //
182 //
183 //
184 //
185 //
186 //
187 //
188 //
189 //
190 //
191 //
192 //
193 //
194 //
195 //
196 //
197 //
198 //
199 //
200 //
201 //
202 //
203 //
204 //
205 //
206 //
207 //
208 //
209 //
210 //
211 //
212 //
213 //
214 //
215 //
216 //
217 //
218 //
219 //
220 //
221 //
222 //
223 //
224 //
225 //
226 //
227 //
228 //
229 //
230 //
231 //
232 //
233 //
234 //
235 //
236 //
237 //
238 //
239 //
240 //
241 //
242 //
243 //
244 //
245 //
246 //
247 //
248 //
249 //
250 //
251 //
252 //
253 //
254 //
255 //
256 //
257 //
258 //
259 //
260 //
261 //
262 //
263 //
264 //
265 //
266 //
267 //
268 //
269 //
270 //
271 //
272 //
273 //
274 //
275 //
276 //
277 //
278 //
279 //
280 //
281 //
282 //
283 //
284 //
285 //
286 //
287 //
288 //
289 //
290 //
291 //
292 //
293 //
294 //
295 //
296 //
297 //
298 //
299 //
300 //
301 //
302 //
303 //
304 //
305 //
306 //
307 //
308 //
309 //
310 //
311 //
312 //
313 //
314 //
315 //
316 //
317 //
318 //
319 //
320 //
321 //
322 //
323 //
324 //
325 //
326 //
327 //
328 //
329 //
330 //
331 //
332 //
333 //
334 //
335 //
336 //
337 //
338 //
339 //
340 //
341 //
342 //
343 //
344 //
345 //
346 //
347 //
348 //
349 //
350 //
351 //
352 //
353 //
354 //
355 //
356 //
357 //
358 //
359 //
360 //
361 //
362 //
363 //
364 //
365 //
366 //
367 //
368 //
369 //
370 //
371 //
372 //
373 //
374 //
375 //
376 //
377 //
378 //
379 //
380 //
381 //
382 //
383 //
384 //
385 //
386 //
387 //
388 //
389 //
390 //
391 //
392 //
393 //
394 //
395 //
396 //
397 //
398 //
399 //
400 //
401 //
402 //
403 //
404 //
405 //
406 //
407 //
408 //
409 //
410 //
411 //
412 //
413 //
414 //
415 //
416 //
417 //
418 //
419 //
420 //
421 //
422 //
423 //
424 //
425 //
426 //
427 //
428 //
429 //
430 //
431 //
432 //
433 //
434 //
435 //
436 //
437 //
438 //
439 //
440 //
441 //
442 //
443 //
444 //
445 //
446 //
447 //
448 //
449 //
450 //
451 //
452 //
453 //
454 //
455 //
456 //
457 //
458 //
459 //
460 //
461 //
462 //
463 //
464 //
465 //
466 //
467 //
468 //
469 //
470 //
471 //
472 //
473 //
474 //
475 //
476 //
477 //
478 //
479 //
480 //
481 //
482 //
483 //
484 //
485 //
486 //
487 //
488 //
489 //
490 //
491 //
492 //
493 //
494 //
495 //
496 //
497 //
498 //
499 //
500 //
501 //
502 //
503 //
504 //
505 //
506 //
507 //
508 //
509 //
510 //
511 //
512 //
513 //
514 //
515 //
516 //
517 //
518 //
519 //
520 //
521 //
522 //
523 //
524 //
525 //
526 //
527 //
528 //
529 //
530 //
531 //
532 //
533 //
534 //
535 //
536 //
537 //
538 //
539 //
540 //
541 //
542 //
543 //
544 //
545 //
546 //
547 //
548 //
549 //
550 //
551 //
552 //
553 //
554 //
555 //
556 //
557 //
558 //
559 //
560 //
561 //
562 //
563 //
564 //
565 //
566 //
567 //
568 //
569 //
570 //
571 //
572 //
573 //
574 //
575 //
576 //
577 //
578 //
579 //
580 //
581 //
582 //
583 //
584 //
585 //
586 //
587 //
588 //
589 //
590 //
591 //
592 //
593 //
594 //
595 //
596 //
597 //
598 //
599 //
600 //
601 //
602 //
603 //
604 //
605 //
606 //
607 //
608 //
609 //
610 //
611 //
612 //
613 //
614 //
615 //
616 //
617 //
618 //
619 //
620 //
621 //
622 //
623 //
624 //
625 //
626 //
627 //
628 //
629 //
630 //
631 //
632 //
633 //
634 //
635 //
636 //
637 //
638 //
639 //
640 //
641 //
642 //
643 //
644 //
645 //
646 //
647 //
648 //
649 //
650 //
651 //
652 //
653 //
654 //
655 //
656 //
657 //
658 //
659 //
660 //
661 //
662 //
663 //
664 //
665 //
666 //
667 //
668 //
669 //
670 //
671 //
672 //
673 //
674 //
675 //
676 //
677 //
678 //
679 //
680 //
681 //
682 //
683 //
684 //
685 //
686 //
687 //
688 //
689 //
690 //
691 //
692 //
693 //
694 //
695 //
696 //
697 //
698 //
699 //
700 //
701 //
702 //
703 //
704 //
705 //
706 //
707 //
708 //
709 //
710 //
711 //
712 //
713 //
714 //
715 //
716 //
717 //
718 //
719 //
720 //
721 //
722 //
723 //
724 //
725 //
726 //
727 //
728 //
729 //
730 //
731 //
732 //
733 //
734 //
735 //
736 //
737 //
738 //
739 //
740 //
741 //
742 //
743 //
744 //
745 //
746 //
747 //
748 //
749 //
750 //
751 //
752 //
753 //
754 //
755 //
756 //
757 //
758 //
759 //
760 //
761 //
762 //
763 //
764 //
765 //
766 //
767 //
768 //
769 //
770 //
771 //
772 //
773 //
774 //
775 //
776 //
777 //
778 //
779 //
780 //
781 //
782 //
783 //
784 //
785 //
786 //
787 //
788 //
789 //
790 //
791 //
792 //
793 //
794 //
795 //
796 //
797 //
798 //
799 //
800 //
801 //
802 //
803 //
804 //
805 //
806 //
807 //
808 //
809 //
810 //
811 //
812 //
813 //
814 //
815 //
816 //
817 //
818 //
819 //
820 //
821 //
822 //
823 //
824 //
825 //
826 //
827 //
828 //
829 //
830 //
831 //
832 //
833 //
834 //
835 //
836 //
837 //
838 //
839 //
840 //
841 //
842 //
843 //
844 //
845 //
846 //
847 //
848 //
849 //
850 //
851 //
852 //
853 //
854 //
855 //
856 //
857 //
858 //
859 //
860 //
861 //
862 //
863 //
864 //
865 //
866 //
867 //
868 //
869 //
870 //
871 //
872 //
873 //
874 //
875 //
876 //
877 //
878 //
879 //
880 //
881 //
882 //
883 //
884 //
885 //
886 //
887 //
888 //
889 //
890 //
891 //
892 //
893 //
894 //
895 //
896 //
897 //
898 //
899 //
900 //
901 //
902 //
903 //
904 //
905 //
906 //
907 //
908 //
909 //
910 //
911 //
912 //
913 //
914 //
915 //
916 //
917 //
918 //
919 //
920 //
921 //
922 //
923 //
924 //
925 //
926 //
927 //
928 //
929 //
930 //
931 //
932 //
933 //
934 //
935 //
936 //
937 //
938 //
939 //
940 //
941 //
942 //
943 //
944 //
945 //
946 //
947 //
948 //
949 //
950 //
951 //
952 //
953 //
954 //
955 //
956 //
957 //
958 //
959 //
960 //
961 //
962 //
963 //
964 //
965 //
966 //
967 //
968 //
969 //
970 //
971 //
972 //
973 //
974 //
975 //
976 //
977 //
978 //
979 //
980 //
981 //
982 //
983 //
984 //
985 //
986 //
987 //
988 //
989 //
990 //
991 //
992 //
993 //
994 //
995 //
996 //
997 //
998 //
999 //
1000 //
```

Полученные численные результаты

число звеньев	кол-во всевозможных вариантов разверток	кол-во алгебраически хороших кодов	кол-во траекторий
2	25	1	1
4	625	8	8
6	15625	78	28
8	390625	720	24
10	9765625	6534	44
12	244140625	58960	20
14	6103515625	531198	68
16	152587890625	4782240	116

Обобщение

Лемма 6.

Последовательность является алгебраически хорошей для правильного 2^k -угольника, когда выполняются следующие условия:

1. длина последовательности нечётна;
2. операция $*$ на последовательности $(a[0] * a[1] * a[2] * \dots * a[n]) = a[0]$;
3. $a[0] = a[n]$;

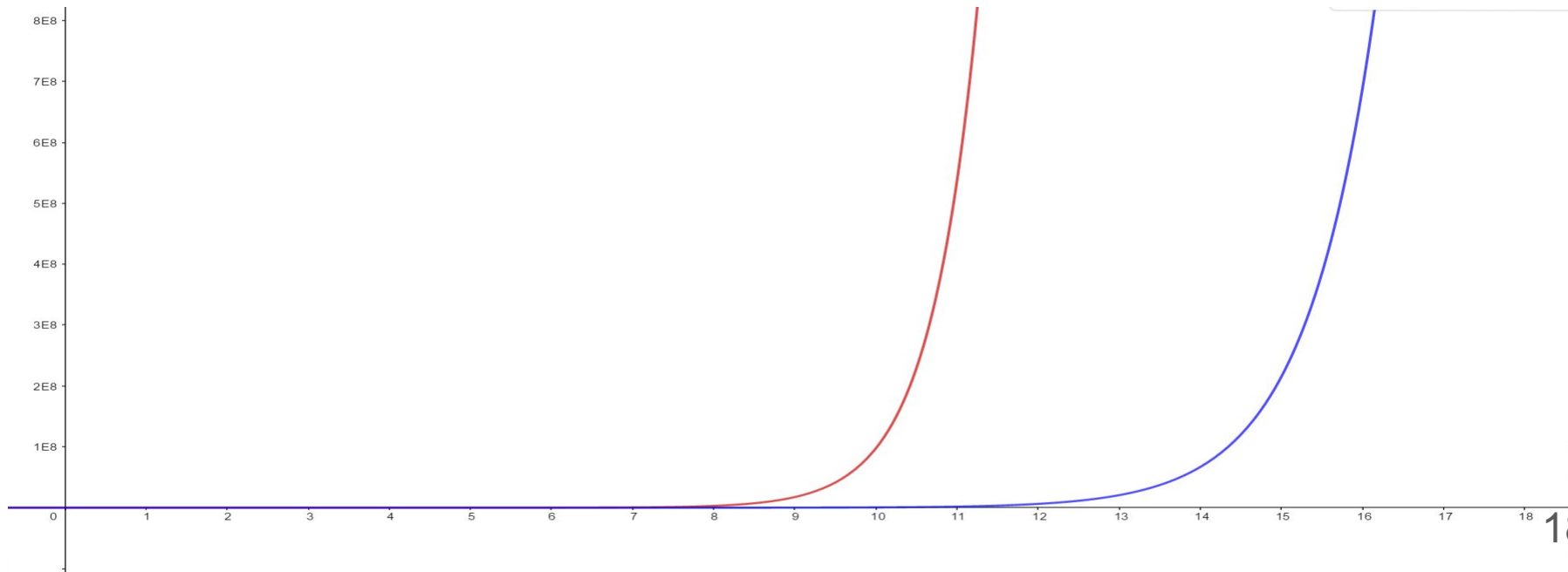
Теорема 4.

Алгебраически хороший код имеет не более одной корректной геометрической интерпретации для зафиксированного первого отражения.

Выводы и результаты

5^N vs 3^N

$N = 16$ $5^N \sim 1.5 * 10^{11}$ (~ 1500 сек ~ 30 минут) $3^N = 42\,046\,721$ (~1 сек)



Итоги работы

1. Обнаружены проблемы использования гексагональной решетки для полного описания поведения траекторий.
2. Введено кодирование траекторий, позволяющее описать комбинаторные типы траекторий и улучшить асимптотическую сложность работы наивного алгоритма перебора с $O(5^n * n)$ до $O(3^n * n)$.
3. Сформулированы необходимые свойства кода траектории для получения развертки реальной периодической траектории.
4. Разработана и реализована (на языке C++) программа для подсчета количества различных хороших алгебраических кодов и их корректных геометрических интерпретаций.
5. Сформулировано и доказано 6 лемм и 4 теоремы.
6. Доказана универсальность разработанного для правильных шестиугольников алгебраического кода и его свойств по отношению ко всем правильным многоугольникам с четным количеством сторон.
7. Выведена аналитическая формула для количества алгебраически хороших кодов.

Задачи для последующего исследования

1. Внедрение оптимизации следующей из теоремы 2 в программу;
2. Введение понятия комбинаторно эквивалентных кодов и разверток;
3. Подсчет комбинаторно неэквивалентных периодических траекторий;
4. Вывод аналитических формул для количества n -звенных периодических траекторий;
5. Реализация графического модуля;
6. Исследование возможности обобщения алгебраического кода для неправильных многоугольников и многоугольников с нечетным количеством сторон.

Список литературы

1. Воробец Я. Б., Гальперин Г. А., Степин А. М. Периодические бильярдные траектории в многоугольниках: механизмы рождения. УМН. 1992. Т.~47, №~3. С.~9--74.
2. Кириллов А. Н., Алькин Р. В. Устойчивость периодических бильярдных траекторий в треугольнике. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 18:1 (2018), 25–3
3. В. Ю. Протасов. Максимумы и минимумы в геометрии. — М.: МЦНМО, 2005.
4. Гальперин Г. А., Земляков А. Н. Математические бильярды.-М Наука. Библиотечка «Квант». 1990. Вып. 77
5. Д. А. Лачинов, А. Ф. Ляхов Криптосистема с открытым ключом, созданная на основе математического бильярда. Матем. обр., 2011, № 2(58), 19–28
6. Шан-Гирей А., Флоринский Г. Графическое решение уравнений. Способ Лилля (рус.) В.О.Ф.Э. М.. — 1889. — No 61. — С. 6—10.
7. S. Tabachnikov, Remarks on magnetic flows and magnetic billiards, Finsler metrics and a magnetic analog of Hilberts fourth problem, Dynamical systems and related topics, Cambridge Univ. Press, 2004, pp.233-252.

Спасибо за внимание!