$\mathfrak{H}_p\mathfrak{H}_q$-выпуклые функции и обобщение классических неравенств

Шабес Вячеслав

Академический лицей "Физико-техническая школа"
Научный руководитель: С. М. Горский

Определение 1 (Среднее Колмогорова)

$$\mathfrak{K}_\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_n)}{n}\right),$$

где φ — строго монотонная функция.

Определения

Определение 1 (Среднее Колмогорова)

$$\mathfrak{K}_\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_n)}{n}\right),$$

где φ — строго монотонная функция.

Определение 2 (Среднее Гёльдера)

$$\mathfrak{H}_p(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} \left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}, & p \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}, & p = 0. \end{cases}$$

Определение 3

Функция f называется $\mathfrak{MN}$-выпуклой функцией, если для любых x и y из области определения функции f выполняется неравенство

$$f(\mathfrak{M}(x,y)) \leqslant \mathfrak{N}(f(x), f(y)),$$

где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — средние величины.

В случае, если предыдущее неравенство выполняется с обратным знаком, то функция f называется $\mathfrak{MN}$-вогнутой функцией.

$\mathfrak{MN}$-выпуклые функции

Заметим, что $\mathfrak{H}_p$ является частным случаем среднего Колмогорова ($\varphi(x) = x^p$, при $p \neq 0$ и $\varphi(x) = \ln x$ если $p = 0$). Если $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ являются средними по Колмогорову, то можно воспользоваться критерием $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$-выпуклости функции.

Заметим, что $\mathfrak{H}_p$ является частным случаем среднего Колмогорова ($\varphi(x) = x^p$, при $p \neq 0$ и $\varphi(x) = \ln x$ если $p = 0$). Если $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ являются средними по Колмогорову, то можно воспользоваться критерием $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$-выпуклости функции.

Теорема 1

[1],Непрерывная функция f является $\mathfrak{K}_\varphi\mathfrak{K}_\psi$-выпуклой функцией тогда и только тогда, когда $\varphi^{-1}(f(\psi(x)))$ является выпуклой (вогнутой) функцией, где ψ— строго возрастающая (убывающая) функция.

Примеры $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0$-выпуклых функций:

$f(x) = e^{\ln^2 x}$;

$f(x) = e^{\ln(x) - \ln(\ln(x))} = \frac{x}{\ln x}$;

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 1, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Теорема 2

Пусть $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ *—* $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0$*-выпуклая функция. Тогда, для положительных наборов* a_i, b_i, *и* p, $q > 1$, *таких что* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *верно неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} f(b_i)\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^{n} f(a_i^{\frac{1}{p}} b_i^{\frac{1}{q}}).$$

Доказательство.

Пусть $A = \left(\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)^{\frac{1}{p}}$, $B = \left(\sum_{i=1}^{n} f(b_i)\right)^{\frac{1}{q}}$. Тогда, по неравенству Юнга,

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{f(a_i)}{A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{f(b_i)}{B^q} \geq \frac{f^{\frac{1}{p}}(a_i) f^{\frac{1}{q}}(b_i)}{AB}.$$

В силу $\mathfrak{H}_0\mathfrak{H}_0$-выпуклости $\dfrac{f^{\frac{1}{p}}(a_i) f^{\frac{1}{q}}(b_i)}{AB} \geq \dfrac{f(a_i^{\frac{1}{p}} b_i^{\frac{1}{q}})}{AB}$.
Просуммировав по i и домножив на AB, получим требуемое неравенство. $\square$

Суб- и супер-аддитиные функции, неравенства Минковского и Малера

Определение 4

Функция $f : I \to J$ называется суб-аддитивной, если для любых $x, y \in I$, таких что $x + y \in I$ выполняется $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Суб- и супер-аддитиные функции, неравенства Минковского и Малера

Определение 4

Функция $f : I \to J$ называется суб-аддитивной, если для любых $x, y \in I$, таких что $x + y \in I$ выполняется $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Лемма 1

Пусть $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ *— $H_1 H_q$-вогнутая функция* $(q \geq 1)$, *и* $f(0) = 0$. *Тогда* f *— суб-аддитивная функция.*

Суб- и супер-аддитиные функции, неравенства Минковского и Малера

Доказательство.

По определению $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_q$-вогнутости,

$f(\lambda x + (1-\lambda)0) \geq (\lambda f^q(x) + (1-\lambda) f^q(0))^{\frac{1}{q}} = \lambda^{\frac{1}{q}} f(x)$.

Рассмотрим $f(x) + f(y)$:

$$f(x) + f(y) = f(\tfrac{x}{x+y}(x+y)) + f(\tfrac{y}{x+y}(x+y)) \geq$$

$$\geq f(x+y)((\tfrac{x}{x+y})^{\frac{1}{q}} + (\tfrac{y}{x+y})^{\frac{1}{q}}) = f(x+y)\left(\frac{x^{\frac{1}{q}} + y^{\frac{1}{q}}}{(x+y)^{\frac{1}{q}}}\right) \geq$$

$$\geq f(x+y)\left(\frac{(x+y)^{\frac{1}{q}}}{(x+y)^{\frac{1}{q}}}\right) = f(x+y).$$

$\square$

Теорема 3

Пусть $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ *— суб-аддитивная функция. Тогда, для положительных наборов* a_i, b_i, *верно неравенство*

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f^p(a_i)}{n}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f^p(b_i)}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f^p(a_i + b_i)}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство.

По определению суб-аддитивной функции $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Тогда рассмотрим $\sum\limits_{i=1}^{n} f^p(a_i + b_i)$:

$$\sum_{i=1}^{n} f^p(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i + b_i) f^{p-1}(a_i + b_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} f(a_i) f^{p-1}(a_i + b_i) + \sum_{i=1}^{n} f(b_i) f^{p-1}(a_i + b_i).$$

$\square$

Доказательство.

По неравенству Гёльдера

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) f^{p-1}(a_i+b_i) + \sum_{i=1}^{n} f(b_i) f^{p-1}(a_i+b_i) \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n} f^p(a_i)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} f^p(a_i+b_i)\right)^{\frac{p-1}{p}} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} f^p(b_i)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} f^p(a_i+b_i)\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Если поделить исходное и получившееся выражения на $\left(\sum_{i=1}^{n} f^p(a_i+b_i)\right)^{\frac{p-1}{p}} n^{\frac{1}{p}}$, то получим искомое неравенство. $\square$

Суб- и супер-аддитиные функции, неравенства Минковского и Малера

Следствие 1

Пусть $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ — $H_1 H_q$*-вогнутая функция* $(q \geq 1)$, *и* $f(0) = 0$. *Тогда справедливо неравенство*

$$2^{1-\frac{1}{q}} \left(f^q\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + f^q\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\right)^{\frac{1}{q}} \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + $$

$$+ f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^q(a_i)\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^q(b_i)\right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^q(a_i + b_i)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство.

Третье неравенство верно в силу предыдущей леммы и теоремы.
Второе неравенство верно в силу определения $H_1 H_q$-вогнутой функции.
Первое неравенство верно в силу неравенства о средних. $\square$

Теорема 4

Пусть $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ *— суб-аддитивная функция. Тогда, для положительных наборов* a_i, b_i, *верно неравенство*

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f(a_i)} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f(b_i)} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f(a_i + b_i)}.$$

Доказательство.

По неравенству Маллера $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f(a_i)} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f(b_i)} \leq$

$\leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} (f(a_i) + f(b_i))}$, т.к. f — суб-аддитивная, то для неё выполняется неравенство

$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} (f(a_i) + f(b_i))} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f(a_i + b_i)}$, что и требовалось доказать. $\square$

Неравенство Радона

Теорема 5

Для положительных наборов a_i и b_i и для положительного m справедливо следующее неравенство:

$$\frac{a_1^{m+1}}{b_1^m} + \ldots + \frac{a_n^{m+1}}{b_n^m} \geq \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^{m+1}}{(b_1 + \ldots + b_n)^m}.$$

Теорема 6

Пусть $m \in \mathbb{N}$ *и* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *такая, что* $\sqrt[m+1]{f}$ *— суб-аддитивная. Тогда для положительных наборов* b_i *верно неравенство:*

$$\frac{f(a_1)}{b_1^m} + \ldots + \frac{f(a_n)}{b_n^m} \geq \frac{f(a_1 + \ldots + a_n)}{(b_1 + \ldots + b_n)^m}.$$

Доказательство.

Докажем неравенство методом математической индукции.
Пусть $n = 2$:

$$\frac{f(a_1)}{b_1^m} + \frac{f(a_2)}{b_2^m} \geq \frac{f(a_1 + a_2)}{(b_1 + b_2)^m}.$$

Приведём дроби к общему знаменателю:

$$f(a_1)b_2^m(b_1 + b_2)^m + f(a_2)b_1^m(b_1 + b_2)^m \geq f(a_1 + a_2)b_1^m b_2^m.$$

Далее, раскроем $(b_1 + b_2)^m$ по биному Ньютона:
$f(a_1)b_1^m b_2^m + f(a_2)b_1^m b_2^m + \sum\limits_{k=1}^{m}(f(a_1)C_m^k b_1^{m-k} b_2^{m+k} +$
$C_m^{k-1} b_1^{2m-k+1} b_2^{k-1})$. По неравенству Коши для k-го члена выполняется неравенство

$$f(a_1)C_m^k b_1^{m-k} b_2^{m+k} + C_m^{k-1} b_1^{2m-k+1} b_2^{k-1} \geq$$
$$\geq C_{m+1}^k (b_1^m b_2^m f(a_1)^{1-\frac{k}{m+1}} f(a_2)^{\frac{k}{m+1}}$$

Доказательство.

То есть исходное выражение больше или равно, чем

$$f(a_1)b_1^m b_2^m + \sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k \left(b_1^m b_2^m f(a_1)^{1-\frac{k}{m+1}} f(a_2)^{\frac{k}{m+1}}\right) + f(a_2) b_1^m b_2^m =$$

$$= b_1^m b_2^m \left(\sqrt[m+1]{f(a_1)} + \sqrt[m+1]{f(a_2)} \right)^{m+1}.$$

$$b_1^m b_2^m \left(\sqrt[m+1]{f(a_1)} + \sqrt[m+1]{f(a_2)} \right)^{m+1} \geq f(a_1 + a_2) b_1^m b_2^m.$$

Сократим на $b_1^m b_2^m$ и возьмём корень степени $m+1$: $\sqrt[m+1]{f(a_1)} + \sqrt[m+1]{f(a_2)} \geq \sqrt[m+1]{f(a_1 + a_2)}$, что выполняется, когда $\sqrt[m+1]{f}$ — суб-аддитивная. Затем, если неравенство доказано для $n = i$, то для $n = i + 1$:

$$\frac{f(a_1)}{b_1^m} + \ldots + \frac{f(a_i)}{b_i^m} + \frac{f(a_{i+1})}{b_{i+1}^m} \geq \frac{f(a_1 + \ldots + a_n)}{(b_1 + \ldots + b_n)^m} + \frac{f(a_{i+1})}{b_{i+1}^m} \geq$$

по доказанному для двух членов неравенству $\frac{f(a_1+\ldots+a_{i+1})}{(b_1+\ldots+b_{i+1})^m}$. □

Теорема 7

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *такая, что* $\sqrt[m]{f}$ *— суб-аддитивная. Тогда для положительных наборов* b_i *верно неравенство:*

$$\frac{b_1^{m+1}}{f(a_1)} + \ldots + \frac{b_n^{m+1}}{f(a_n)} \geq \frac{(b_1 + \ldots + b_n)^{m+1}}{f(a_1 + \ldots + a_n)}.$$

Теорема 8

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *такая, что* $f^{\frac{1}{x+1}}$ *— суб-аддитивная и* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *такая, что* $g^{\frac{1}{x}}$ *— супераддитивная и* $x > 0$. *Тогда для наборов* a_i *и* b_i *верно неравенство:*

$$\frac{f(a_1)}{g(b_1)} + \ldots + \frac{f(a_n)}{g(b_n)} \geq \frac{f(a_1 + \ldots + a_n)}{g(b_1 + \ldots + b_n)}.$$

Доказательство.

Пусть $F(a) = f(a)^{\frac{1}{x+1}}$, а $G(a) = g(a)^{\frac{1}{x}}$. Мы знаем, что

$$\frac{F^{x+1}(a_1)}{G^x(b_1)} + \ldots + \frac{F^{x+1}(a_n)}{G^x(b_n)} \geq \frac{(F(a_1) + \ldots + F(a_n))^{x+1}}{(G(b_1) + \ldots + G(b_n))^x}.$$

Т.к. F — суб-аддитивная, а G — супераддитивная:

$$\frac{(F(a_1) + \ldots + F(a_n))^{x+1}}{(G(b_1) + \ldots + G(b_n))^x} \geq \frac{F^{x+1}(a_1 + \ldots + a_n)}{G^x(b_1 + \ldots + b_n)} =$$

$$= \frac{f(a_1 + \ldots + a_n)}{g(b_1 + \ldots + b_n)}. \qquad \square$$

Замечание: предыдущие две теоремы являются частными случаями предыдущей теоремы. Заметим, что в доказательствах двух предыдущих теорем было предложено своё собственное доказательство неравенства Гёльдера, опирающееся на неравенство Коши. В [2] приведено обобщение неравенства Радона:

Теорема 9

Для положительных наборов a_i *и* b_i, $r \geq s+1$, $s > 0$ *справедливо*

$$\frac{a_1^r}{b_1^s} + \ldots + \frac{a_n^r}{b_n^s} \geq \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^r}{n^{r-s-1}(b_1 + \ldots + b_n)^s}.$$

Откуда следуют следующие теоремы:

Теорема 10

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *такая, что* $f^{\frac{1}{x+r}}$ *— суб-аддитивная и* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *такая, что* $g^{\frac{1}{x}}$ *— супераддитивная и* $x > 0$, $r \geq 1$. *Тогда для наборов* a_i *и* b_i *верно неравенство:*

$$\frac{f(a_1)}{g(b_1)} + \ldots + \frac{f(a_n)}{g(b_n)} \geq \frac{f(a_1 + \ldots + a_n)}{n^{r-1} g(b_1 + \ldots + b_n)}.$$

Неравенство Радона

Теорема 10

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *такая, что* $f^{\frac{1}{x+r}}$ *— суб-аддитивная и* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *такая, что* $g^{\frac{1}{x}}$ *— супераддитивная и* $x > 0$, $r \geq 1$. *Тогда для наборов* a_i *и* b_i *верно неравенство:*

$$\frac{f(a_1)}{g(b_1)} + \ldots + \frac{f(a_n)}{g(b_n)} \geq \frac{f(a_1 + \ldots + a_n)}{n^{r-1} g(b_1 + \ldots + b_n)}.$$

Теорема 11

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $H_{\frac{1}{m+r}} Q$*-выпуклая и* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $H_{\frac{1}{m}} R$*-вогнутой и* $m > 0$, $r \geq 1$. *Тогда для наборов* a_i *и* b_i *верно неравенство:*

$$\frac{1}{n^r} \left(\frac{f(a_1)}{g(b_1)} + \ldots + \frac{f(a_n)}{g(b_n)} \right) \geq \frac{f(Q(a_1, \ldots, a_n))}{g(R(b_1, \ldots, b_n))}.$$

Выводы

- Неравенства Гёльдера и Коши-Буняковского;

Выводы

- Неравенства Гёльдера и Коши-Буняковского;
- Неравенства Минковского и Малера;

Выводы

- Неравенства Гёльдера и Коши-Буняковского;
- Неравенства Минковского и Малера;
- Неравенство Радона.

Список литературы

Niculescu C.P., *Convexity according to means*// J. Math. Ineq. Appl.—2003.—vol.6 №4.—p. 571–579.

Yongtao Li, Xian-Ming Gu, Jianci Xiao, *A note on the proofs of generalized Radon inequality*// https://arxiv.org/pdf/1504.05874.pdf