XX КОЛМОГОРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Королев Виктор Андреевич
9 класс Муниципальное общеобразовательное учреждение "Средняя общеобразовательная школа № 7", Саратов

Королева Арина Андреевна
8 класс Муниципальное общеобразовательное учреждение "Гуманитарно-экономический лицей", Саратов

Научный руководитель: Королев Андрей Альбертович, Государственное автономное учреждение дополнительного профессионального образования «Саратовский областной институт развития образования», профессор, д.т.н.

- **Цель работы**: исследование различных способов решения экономических задач методом линейного программирования.
- В связи поставленной целью необходимо было решить ряд **задач**:
- расширить и углубить знания по линейному программированию;
- изучить литературу по данной теме;
- систематизировать способы решения задач линейного программирования;
- проанализировать решение задач методом линейного программирования для различных задач экономики, а также задач, встречающихся в ЕГЭ профильной математики № 17.
- Оптимизировать затраты семейного бюджета.

Объект исследования: задачи экономического типа на распределение ресурсов.
Актуальность работы: в наше время решение задач на оптимизацию являются достаточно актуальными.
В частности, показано как с помощью линейного программирования решать некоторые задачи № 17 профильного ЕГЭ по математике, а также как **оптимизировать затраты на покупку основных продуктов.**

Родоначальником линейного программирования является советский математик **Леонид Витальевич Канторович**, который в 1939 году издал брошюру «Математические методы организации и планирования производства».

После войны американские экономисты **Т. Купманс и А. Данциг** также пришли к тем идеям, которые изложил в своей брошюре Канторович, но узнав о работе советского математика, Т. Купманс настаивает о переиздании этой брошюры и после этого имя и идеи Канторовича становятся известны всем.

Его вклад в этой области был отмечен Ленинской премией в 1965 году (присуждена ему совместно с В.С.Немчиновым и В.В.Новожиловым), а затем, в 1975 году, **Нобелевской премией**.

Примеры задач ЛП

Задача № 1. Фирма выпускает два вида мороженого: **сливочное** и **шоколадное**. Для изготовления мороженого используются два исходных продукта: **молоко** и **наполнители**, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы исходных продуктов даны в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	Сливочное	Шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Отпускная цена 1 кг сливочного мороженого 16 ден. ед., шоколадного мороженого 14 ден. ед.

Требуется определить, какое **количество мороженого** каждого вида должна производить фирма, чтобы **доход от реализации продукции был максимальным**?

Для решения задачи необходимо составить ее **математическую модель** – записать условие в виде уравнений и неравенств. Для этого введем обозначения:

Пусть x_1 - суточный объем выпуска сливочного мороженого, кг,

x_2 - суточный объем выпуска шоколадного мороженого, кг

Тогда доход от реализации имеет вид:

Математическая модель задачи запишем следующим образом.

Требуется найти x_1 и x_2 а также при этих значениях величину *L* функции из условий:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365 \\ x_1 - x_2 \le 100 \\ x_2 \le 350 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$L = 16x_1 + 14x_2 \to \max$$

Функцию , которую необходимо оптимизировать (сделать наиболее эффективной), называют **целевой функцией**. В нашем случае – это получение максимальной прибыли.

Задача № 2. Предприятие имеет возможность приобрести не более 19 трехтонных автомашин и не более 17 пятитонных. Отпускная цена трехтонного грузовика — 400000 руб., пятитонного — 500000 руб. Предприятие может выделить для приобретения автомашин 14,1 млн. руб. Сколько нужно приобрести автомашин, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной?

Для получения математической модели, обозначим искомые неизвестные в вопросе задачи через: x_1- число трехтонных машин и x_2.- число пятитонных. Тогда целевая функция – суммарная грузоподъемность имеет вид: $L = 3x_1 + 5x_2$.

Тогда математическая модель задачи будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 \le 19 \\ x_2 \le 17 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \le 14{,}1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$L = 3x_1 + 5x_2 \to \max$$

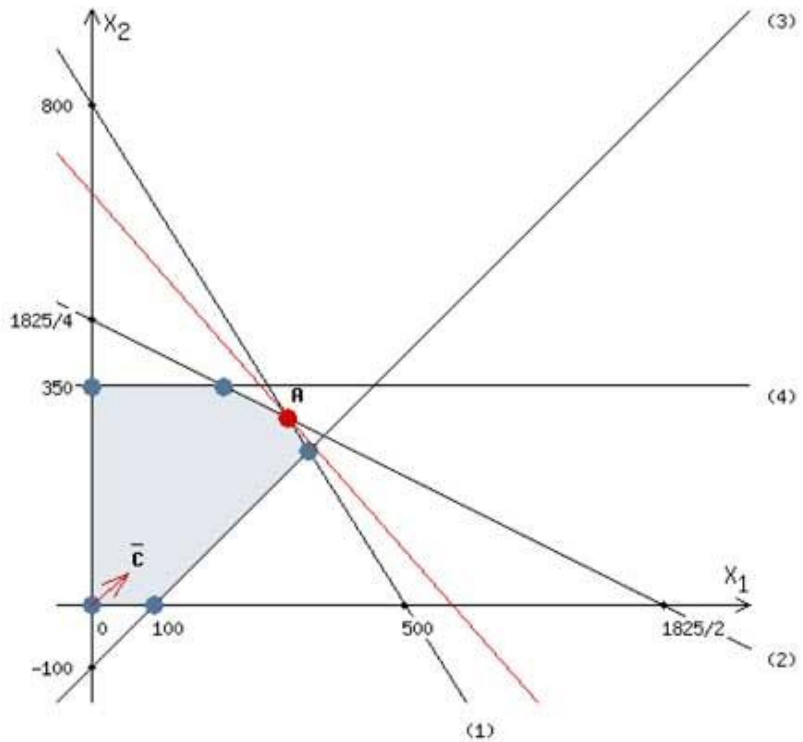
Задача № 3 . Малое предприятие выпускает изделия двух типов. Для изготовления изделия первого типа требуется 9 часов работы станка А и 11 часов работы станка Б. Для изготовления изделия второго типа требуется 13 часов работы станка А и 3 часа работы станка Б (станки могут работать в любой последовательности). По техническим причинам станок А может работать не более 130 часов в месяц, а станок Б—не более 88 часов в месяц. Каждое изделие первого типа приносит предприятию 22 000 д. е. прибыли, а каждое изделие второго типа—26 000 д. е. прибыли. Найдите **наибольшую возможную ежемесячную прибыль** предприятия и определите, сколько изделий первого типа и сколько изделий второго типа следует выпускать для получения этой прибыли.

Целевая функция $L = 22000x_1 + 26000x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 9x_1 + 13x_2 \le 130 \\ 11x_1 + 3x_2 \le 88 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Графический метод решения задачи линейного программирования

Задача 1. Решение



$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365 \\ x_1 - x_2 \le 100 \\ x_2 \le 350 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$L = 16x_1 + 14x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 312{,}5 \\ x_2 = 300 \end{cases}$$

Рис. *ОДЗ нашей задачи (заштрихованная область), прямая уровня* $x_2 = -\frac{16}{14}x_1 + \frac{c}{14}$, *а также оптимальная точка* A

Задача 2. Решение

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 19 \\ 0 \le x_2 \le 17 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \le 1 \end{cases}$$

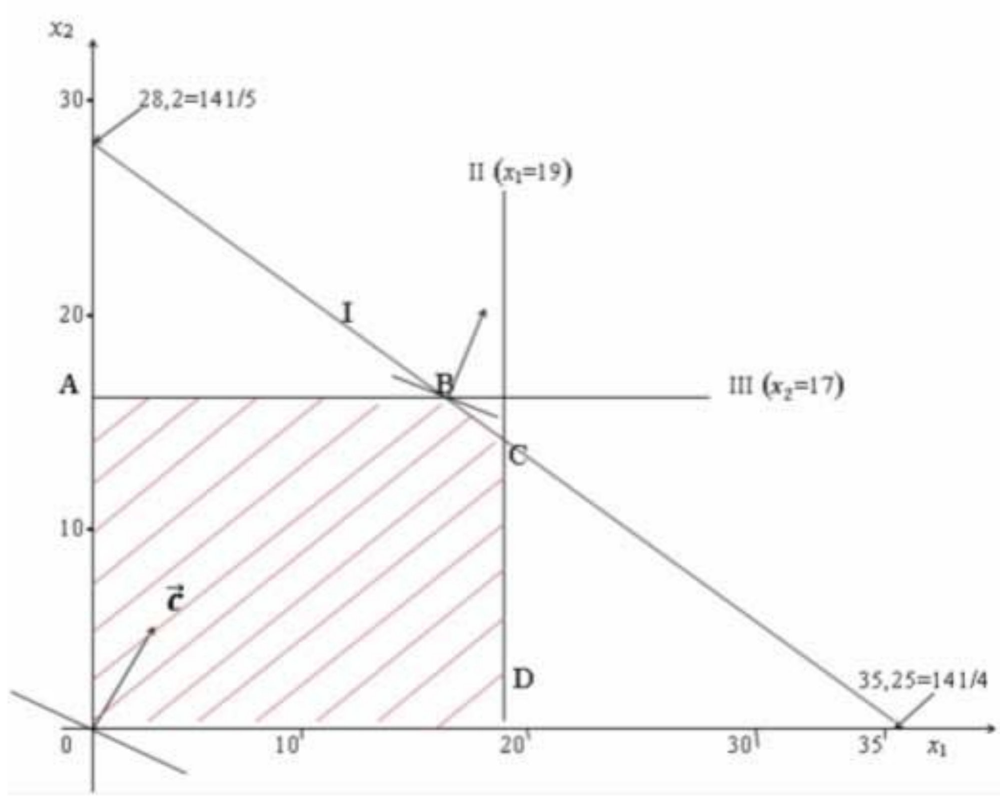


Рис.3 *ОДЗ нашей задачи (заштрихованная область), прямая уровня* $3x_1 + 5x_2 = c$, *а также оптимальная точка B*

Видим, что решение находится при пересечении прямых $x_2 = 17$ и $0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 = 14{,}1$. Откуда находим точку пересечения: $0{,}4x_1 + 0{,}5 \cdot 17 = 14{,}1$ $B(14{,}17)$

Ответ: Нужно купить 14 трехтонных и 17 пятитонных машин. При этом максимальная грузоподъемность будет $3 \cdot 14 + 5 \cdot 17 = 127$ тонн.

Задача 3. Решение

$$\begin{cases} 9x_1 + 13x_2 \le 130 \\ 11x_1 + 3x_2 \le 88 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$L = 22000x_1 + 26000x_2 = 2000(11x_1 + 13x_2) \to \max$$

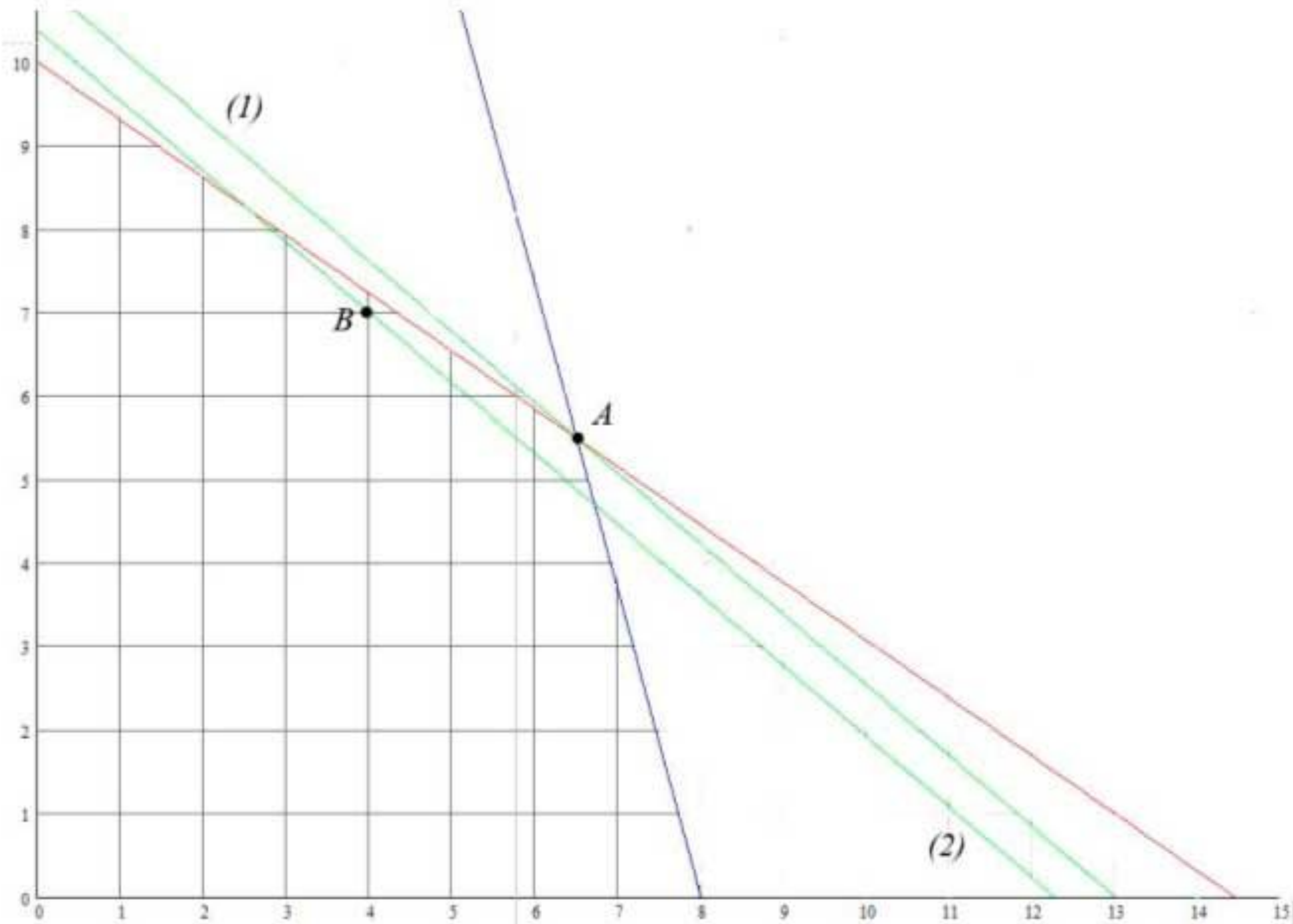


Рис.4 *ОДЗ нашей задачи (заштрихованная область), прямая уровня* $11x_1 + 13x_2 = c$*, а также оптимальная точка* A

$$\begin{cases} 9x_1 + 13x_2 = 130 \\ 11x_1 + 3x_2 = 88 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{13}{2} \\ x_2 = \dfrac{11}{2} \end{cases}$$

$$B(4,7)$$

Симплекс-метод
(алгебраический подход к решению задач ЛП)

Задача № 1

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365 \\ x_1 - x_2 \le 100 \\ x_2 \le 350 \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0 \quad L = 16x_1 + 14x_2 \to \max$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 400 - (0{,}8x_1 + 0{,}5x_2) \ge 0 \\ 365 - (0{,}4x_1 + 0{,}8x_2) \ge 0 \\ 100 - (x_1 - x_2) \ge 0 \\ 350 - x_2 \ge 0 \end{cases} \\ L = 0 - (-16x_1 - 14x_2) \to \max \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} y_1 = 400 - (0{,}8x_1 + 0{,}5x_2) \\ y_2 = 365 - (0{,}4x_1 + 0{,}8x_2) \\ y_3 = 100 - (x_1 - x_2) \\ y_4 = 350 - (x_2) \end{cases} \\ L = 0 - (-16x_1 - 14x_2) \to \max \end{cases}$$

Таким образом, введя новые переменные, мы от системы неравенств перешли к системам уравнений. Задача свелась к **основной задаче линейного программирования (ОЗЛП)**, которая ставится так: подобрать неотрицательные значения x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4 таким образом, чтобы функция L приняла бы максимальное значение. Причем, x_1, x_2 называются независимыми или **базисными переменными**, а y_2, y_3, y_4 зависимыми.

Заменим переменную $x_1 \leftrightarrow y_3$

$$\begin{cases} y_1 = 320 - \left(-\frac{4}{5} y_3 + \frac{13}{10} x_2\right) \\ y_2 = 325 - \left(-\frac{2}{5} y_3 + \frac{6}{5} x_2\right) \\ x_1 = 100 - (y_3 - x_2) \\ y_4 = 350 - (x_2) \end{cases}$$

$$L = 1600 - (16 y_3 - 30 x_2) \to \max$$

а меняем $x_2 \leftrightarrow y_1$.

$$\begin{cases} x_2 = \frac{3200}{13} - \left(-\frac{8}{13} y_3 + \frac{10}{13} y_1\right) \\ y_2 = \frac{385}{13} - \left(\frac{22}{65} y_3 - \frac{12}{13} y_1\right) \\ x_1 = \frac{4500}{13} - \left(\frac{5}{13} y_3 + \frac{10}{13} y_1\right) \\ y_4 = \frac{1350}{13} - \left(\frac{8}{13} y_3 - \frac{10}{13} y_1\right) \end{cases}$$

$$L = \frac{116800}{13} - \left(-\frac{32}{13} y_3 + \frac{300}{13} y_1\right).$$

$\Rightarrow$

менные $y_3 \leftrightarrow y_2$:

$$\begin{cases} x_2 = 300 - \left(\frac{20}{11} y_2 - \frac{10}{11} y_1\right) \\ y_3 = \frac{175}{2} - \left(\frac{65}{22} y_2 - \frac{30}{11} y_1\right) \\ x_1 = \frac{625}{2} - \left(-\frac{25}{22} y_2 + \frac{20}{11} y_1\right) \\ y_4 = 50 - \left(-\frac{20}{11} y_2 + \frac{10}{11} y_1\right) \end{cases}$$

$$L = 9200 - \left(\frac{80}{11} y_3 + \frac{180}{11} y_1\right).$$

Решение задачи симплекс методом табличным алгоритмом замены переменных

$$\begin{cases} y_1 = 400 - (0{,}8x_1 + 0{,}5x_2) \\ y_2 = 365 - (0{,}4x_1 + 0{,}8x_2) \\ y_3 = 100 - (x_1 - x_2) \\ y_4 = 350 - (x_2) \end{cases}$$

$$L = 0 - (-16x_1 - 14x_2) \to \max$$

Составим таблицу:

	Свободные члены	x_1	x_2
y_1	400	0,8	0,5
y_2	365	0,4	0,8
y_3	100	1	-1
y_4	350	0	1
L	0	-16	-14

Требуется заменить $x_1 \leftrightarrow y_3$.

Тогда после замены $x_1 \leftrightarrow y_3$

		y_3	x_2
y_1	320	$-\frac{4}{5}$	$\frac{13}{10}$
y_2	325	$-\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$
x_1	100	1	-1
y_4	350	0	1
L	1600	16	-30

Далее меняем $x_2 \leftrightarrow y_1$

		y_3	y_1
x_2	$\frac{3200}{13}$	$-\frac{8}{13}$	$\frac{10}{13}$
y_2	$\frac{385}{13}$	$\frac{22}{65}$	$-\frac{12}{13}$
x_1	$\frac{4500}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{10}{13}$
y_4	$\frac{1350}{13}$	$\frac{8}{13}$	$-\frac{10}{13}$ 1
L	$\frac{116800}{13}$	$-\frac{32}{13}$	$\frac{300}{13}$

И, наконец, $y_3 \leftrightarrow y_2$:

		y_3	y_1
x_2	300	$\frac{20}{11}$	$-\frac{10}{11}$
y_2	$\frac{175}{2}$	$\frac{65}{22}$	$-\frac{30}{11}$
x_1	$\frac{625}{2}$	$-\frac{25}{22}$	$\frac{20}{11}$
y_4	50	$-\frac{20}{11}$	$\frac{10}{11}$ 1
L	9200	$\frac{80}{11}$	$\frac{180}{11}$

Задача оптимизации семейного бюджета

Допустим, требуется узнать какое количество картофеля, кур, сметаны и хлеба требуется купить, чтобы потребить необходимое количество жиров, белков и углеводов и при этом затратить минимальную сумму?

Задачу решили для ***Королевой Арины***, которая имеет вес 52 кг

Начальные данные

Из выражения [5] подсчитываем суточную норму килокалорий:

$$(0{,}0621 \cdot m + 2{,}0357) \times 240 = (0{,}0621 \cdot 52 + 2{,}0357) \times 240 \approx 1278$$

Затем, умножаем этот результат на индекс ее активности: 1,3 получим (кКал):

$1278 \cdot 1{,}3 = 1661{,}4$ кКал

Белки, жиры и углеводы должны быть в соотношении соответственно, поэтому, на потребление белков должно прийтись: $1661{,}4 : 6 = 276{,}9$

на потребление жиров: $1661{,}4 : 6 = 276{,}9$ гр.
на потребление углеводов: $276{,}9 \cdot 4 = 1107{,}6$ гр.

Если перевести в граммы, то белки: 276,9/4=69 гр. ,жиры: 276,9/9=30 гр, углеводы: 1107,6/4=276,9 гр

Также по таблицам определяем количество белков, жиров и углеводах в 100 граммах указанных продуктах:

Продукт	Белки, г	Жиры, г	Углеводы, г
Картофель	2,0	0,1	19,7
Хлеб ржаной	4,7	0,7	49,8
Куры	20,8	8,8	0,6
Сметана 20%	2,8	20,0	3,2

Картофель	Хлеб ржаной	Куры	Сметана 20%
8	4	11,5	8,5

И пусть x_1 - количество картофеля, которое планируется купить,

x_2 - количество ржаного хлеба, которое планируется купить,

x_3 - количество кур, которое планируется купить,

x_4 - количество сметаны, которое планируется купить,

Тогда наша задача ставится следующим образом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4{,}7x_2 + 20{,}8x_3 + 2{,}8x_4 \geq 69 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}7x_2 + 8{,}8x_3 + 20x_4 \geq 30 \\ 19{,}7x_1 + 49{,}8x_2 + 0{,}6x_3 + 3{,}2x_4 \geq 277 \end{cases}$$

$$L = 8x_1 + 4x_2 + 11{,}5x_3 + 8{,}5x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} -69-(-2x_1-4{,}7x_2-20{,}8x_3-2{,}8x_4)\ge 0 \\ -30-(-0{,}1x_1-0{,}7x_2-8{,}8x_3-20x_4)\ge 0 \\ -277-(-19{,}7x_1-49{,}8x_2-0{,}6x_3-3{,}2x_4)\ge 0 \end{cases}$$

$$L=0-(-8x_1-4x_2-11{,}5x_3-8{,}5x_4)\to \min$$

Представим эту задачу в ОЗЛП:

$$\begin{cases} y_1=-69-(-2x_1-4{,}7x_2-20{,}8x_3-2{,}8x_4) \\ y_2=-30-(-0{,}1x_1-0{,}7x_2-8{,}8x_3-20x_4) \\ y_3=-277-(-19{,}7x_1-49{,}8x_2-0{,}6x_3-3{,}2x_4) \\ x_1,x_2,y_1,y_2,y_3\ge 0 \end{cases}$$

$$L=0-(-8x_1-4x_2-11{,}5x_3-8{,}5x_4)\to \min$$

Составим таблицу:

		x_1	x_2	x_3	x_4
L	0	−8	−4	−11,5	−8,5
y_1	−69	−2	−4,7	−20,8	−2,8
y_2	−30	−0,1	−0,7	−8,8	−20
y_3	−277	−19,7	−49,8	−0,6	−3,2

Найдем опорное решение, заменяя независимые переменные.

Заменим, $x_3 \leftrightarrow y_3$

		x_1	x_2	y_3	x_4
L	$\frac{31855}{6}$	$\frac{4435}{12}$	$\frac{1901}{2}$	$-\frac{115}{6}$	$\frac{317}{6}$
y_1	$\frac{28601}{3}$	$\frac{10214}{15}$	$\frac{17217}{10}$	$-\frac{104}{3}$	$\frac{1622}{15}$
y_2	$\frac{12098}{3}$	$\frac{1733}{6}$	$\frac{7297}{10}$	$-\frac{44}{3}$	$\frac{404}{15}$
x_3	$\frac{1385}{3}$	$\frac{197}{6}$	83	$-\frac{5}{3}$	$\frac{16}{3}$

Мы получили опорное решение, так как все свободные члены положительны. При этом, *L=5309,16*. Это, конечно, дороговато.

Теперь найдем оптимальное решение.

Заменим теперь $x_2 \leftrightarrow y_2$

		x_1	y_2	y_3	x_4
L	$\frac{820985}{14594}$	$\frac{-194045}{29188}$	$\frac{-9505}{7297}$	$-\frac{905}{14594}$	$-\frac{259047}{14594}$
y_1	$\frac{410231}{21891}$	$-\frac{122189}{218910}$	$\frac{-17217}{7297}$	$-\frac{1340}{21891}$	$\frac{4880066}{109455}$
x_2	$\frac{120980}{21891}$	$\frac{8665}{21891}$	$\frac{10}{7297}$	$\frac{-440}{21891}$	$\frac{808}{21891}$
x_3	$\frac{65005}{21891}$	$-\frac{881}{43782}$	$\frac{-830}{7297}$	$\frac{35}{21891}$	$\frac{49688}{21891}$

Так как все элементы в строке L отрицательны, то процесс заканчивается. Мы получили оптимальное решение.

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{120980}{21891} \approx 5{,}53,\ x_3 = \frac{65005}{21891} \approx 2{,}97,\ x_4 = 0,\ L = \frac{820985}{14594} \approx 56{,}25$$

Таким образом, суточные минимальные затраты составят всего 56,25 руб, при этом картофель и сметану покупать не нужно, а купить нужно хлеба 553 грамма и 297 грамм курятины.
Задача решена.

Программа расчета замены переменных в симплекс-методе

$$
R(A,k,L) := \left|
\begin{array}{l}
\text{for } i \in 0..4 \\
\quad \text{for } j \in 0..2 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
T_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - \dfrac{A_{L,j} \cdot A_{i,k}}{A_{L,k}} \text{ if } (i \neq L) \wedge (j \neq k) \\
T_{i,j} \leftarrow \dfrac{A_{i,j}}{A_{L,k}} \text{ if } (i = L) \wedge (j \neq k) \\
T_{i,j} \leftarrow \dfrac{-A_{i,j}}{A_{L,k}} \text{ if } (i \neq L) \wedge (j = k) \\
T_{i,j} \leftarrow \dfrac{1}{A_{L,k}} \text{ if } (i = L) \wedge (j = k)
\end{array}
\right. \\
T
\end{array}
\right.
$$

Заключение

- Достоинствами графического метода являются: наглядность, простота алгоритма решения и отсутствие большой трудоемкости вычислений.
- Основным его недостатком является ограниченность применения, так как решения задач выполняются на плоскости, что определяет число возможных **свободных** переменных, их не может быть более двух.
- Симплекс-метод является более универсальным и простым для расчетов, легко алгоритмируется. Однако, он не настолько нагляден как графический метод.

- Были выполнены следующие **задачи**:
- показано, какие задачи можно решать линейным программированием;
- рассмотрены задачи ЛП, встречающиеся в том числе и на ЕГЭ, показаны их решения графическим способом;
- приведены решения указанных задач симплекс-методом, с подробным описании логики самого метода;
- показан способ решения задачи симплекс-методом при помощи таблиц, который упрощает задачу заменой переменной;
- разработана программа расчета замена переменных в симплекс-методе;
- решена практическая задача оптимизации семейного бюджета.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

Докладчики:

Королев Виктор

Королева Арина

г. Саратов-2020