

Мыльная пленка как фильтр мелких частиц

Курьян Михаил Викторович
Школа 853 г. Москвы

Научный руководитель Курьян Виктор Евгеньевич, ООО «АиС»,
директор

Цель работы и основные результаты

В технике часто используют сетчатые фильтры для задержки крупных частиц, при этом мелкие частицы с размером меньше размера ячейки сетки проходят через такие фильтры. Для задержки мелких частиц можно использовать мыльную пленку. Пленка задерживает мелкие частицы, но через нее легко проходят крупные частицы. Настоящая работа посвящена исследованию таких пленочных фильтров, изучению условий, при которых падающие частицы задерживаются пленкой.

В работе проведено теоретическое и экспериментальное исследование возможности мыльной пленки задерживать мелкие частицы. Показано, что при падении на пленку частицы с размерами меньше критического задерживаются пленкой и не пролетают сквозь нее. Вычислен критический размер частиц, исследована зависимость критического размера от формы, плотности падающей частицы, свойств пленки.

Практическая значимость работы

Использование фильтров из мыльных пленок может иметь практическое значение в тех случаях, когда требуется задержать мелкие частицы (фильтры из мыльной пленки задерживают мелкие частицы, пропуская более крупные в отличие от обычных сетчатых фильтров, которые задерживают крупные частицы, пропуская более мелкие). Сочетание сетчатых фильтров с пленочными позволяет создать комбинированный фильтр задерживающий все частицы, что может быть важным в тех случаях, когда необходимо создание «чистой» среды.

Оценим, какой покоящийся груз может выдержать мыльная пленка.

ШАР

Рассмотрим мыльную пленку, натянутую на некоторый горизонтальный проволочный контур. Если на эту пленку положить небольшой груз, то пленка прогнется, но удержит груз (за счет действия сил поверхностного натяжения). Пусть на пленку положили покоящийся шар радиусом r , коэффициент поверхностного натяжения пленки на границе воздух-жидкость (σ , ρ —

плотность материала шара), (m — его масса).

$$\text{Сила тяжести } F_g = mg = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho g \quad (1)$$

$$\text{Сила поверхностного натяжения [1] } F_s = 2\sigma L = 4\pi r \sigma \quad (2)$$

(у мыльной пленки ДВЕ поверхности поэтому коэфф 2 в формуле $F_s = 2\sigma L$)

где L — длина окружности сечения тела. Если $F_g \leq F_s$ то тело задержится на пленке. Для макс размера тела получаем

$$\frac{4\pi}{3} r^3 \rho g = 4\pi r \sigma \quad (3)$$

$$r_{\max}^2 = \frac{3\sigma}{\rho g} \quad (4)$$

Для мыльной пленки $\sigma = 30 * 10^{-3} \text{ Н/м}$, шарик из АБС пластика $\rho = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

получаем $r = 3 \text{ мм}$, для стального шарика $\rho = 8 * 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ получаем $r = 1.1 \text{ мм}$.

Для тел сложной формы возможность удержаться на пленке зависит от того, какой стороной тело соприкасается с пленкой.

Длинный цилиндр.

Рассмотрим удержание **тонкого цилиндра** длины l , радиуса r ($l \gg r$)

$$F_g = mg = \pi r^2 l \rho g \quad (5)$$

$$F_s = 2\sigma L = 4l\sigma \quad (6)$$

Аналогично получаем

$$\pi r^2 l \rho g = 4l\sigma \quad (7)$$

$$r_{\max}^2 = \frac{4\sigma}{\pi \rho g} \quad (8)$$

Этот результат получается, если цилиндр лежит своей осью параллельно пленке.

Радиус цилиндра при этом не зависит от длины цилиндра.

Если ось цилиндра направлена перпендикулярно пленке, то

$$F_s = 2\sigma L = 4\pi r \sigma \quad (9)$$

Условия удержания имеет вид

$$\pi r^2 l \rho g = 4\pi r \sigma \quad (10)$$

$$r_{\max} = \frac{4\sigma}{l \rho g} \quad (11)$$

В этом случае получается существенно меньший радиус, чем при параллельном расположении оси цилиндра.

Если размер падающего тела больше чем r_{\max} , то оно провалится сквозь пленку, а если меньше, то в зависимости от скорости груз может задержаться

пленкой или пролететь сквозь нее. Найдем условия при которых груз задерживается пленкой.

Определение условий захвата груза мыльной пленкой

Предположим, что в начальный момент центр масс груза покоился на высоте H относительно уровня горизонтально расположенной пленки. После этого груз отпускаем, он начинает падать, долетает до пленки, растягивает ее. При сильном растяжении пленка может прорваться и груз продолжит падение. Если при максимальном растяжении пленка не прорывается, то он задерживается пленкой. Определим при какой максимальной величине прогиба пленки H она не разрывается. Для простоты будем считать, что пленка натянута на круглую рамку радиуса R , падающее тело имеет форму шара радиуса (r) и падает по центру пленки. Считаем, что скорость движения тела много меньше скорости распространения поперечных колебаний пленки. В этом приближении можно считать, что пленка имеет ту же форму, что и пленка натянута между двумя параллельными кольцами радиусов R и r (считаем, что $R \gg r$), находящихся на расстоянии H , прямая проходящая через центры колец перпендикулярна плоскостям колец. Форма пленки в этих условиях известна и является поверхностью вращения цепной линии [2,3]. Расстояние от оси вращения до пленки в этом случае можно записать в виде

$$r(x) = a \cosh \frac{x+c}{a} \quad (12)$$

где константы a и c определяются из условий (координата x отсчитывается от нижнего кольца)

$$r = r(0) = a \cosh \frac{c}{a} \quad (13)$$

$$R = r(H) = a \cosh \frac{c+H}{a} \quad (14)$$

Равенство (14) можно преобразовать с использованием известных тождеств с гиперболическими тригонометрическими функциями [4,5]

$$\begin{aligned} R &= a \cosh \frac{c}{a} \cosh \frac{H}{a} + a \sinh \frac{c}{a} \sinh \frac{H}{a} = r \cosh \frac{H}{a} + a \sinh \frac{c}{a} \sinh \frac{H}{a} = \\ &= r \cosh \frac{H}{a} + a \sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1} \sinh \frac{H}{a} \end{aligned} \quad (15)$$

Так как гиперболический косинус больше 1 то $a \leq r$. При увеличении H от 0 до своего максимального значения значение a тоже увеличивается, но не может превзойти r . При a близких к r имеем из (15)

$$R = r \cosh \frac{H}{r} \quad (16)$$

Это равенство определяет максимально возможную величину прогиба мыльной пленки. При $\frac{H}{r} \gg 1$ получаем, что максимальный прогиб мыльной пленки дается величиной

$$H = r \ln \frac{2R}{r} \quad (17)$$

При таком значении прогиба площадь поверхности пленки [4]

$$S = \pi(rH + R\sqrt{R^2 - r^2}) \quad (18)$$

Изменение площади поверхности мыльной пленки ΔS дается формулой

$$\Delta S = \pi(rH + R\sqrt{R^2 - r^2}) - \pi R^2 \quad (19)$$

Подставляя в (19) значение максимального прогиба пленки из (17) получаем, что максимальное изменение площади поверхности пленки составит

$$\Delta S_{\max} = \pi r^2 \left(\ln \frac{2R}{r} - \frac{1}{2} \right) \quad (20)$$

При падении на пленку потенциальная и кинетическая энергия тела превращаются в поверхностную энергию пленки. Если при максимальном прогибе пленка останавливает тело, то из закона сохранения энергии имеем

$$2\sigma \Delta S_{\max} = mg(h + H) \quad (21)$$

где m - масса падающего тела. Для сферического тела $m = \frac{4\pi}{3} \rho r^3$

Подставив в (21) найденные ранее значения ΔS_{\max} и H получим для максимальной высоты падения (h) следующее выражение

$$h = \frac{3\sigma}{2g\rho r} \left(\ln \frac{R}{r} - 0.19 \right) - r \ln \frac{2R}{r} \quad (22)$$

Из этой формулы видно, что максимальная высота падения, практически обратно пропорциональна радиусу тела (с поправкой логарифмического порядка). Видно также, что чем больше размер кольца, на который натянута пленка, тем большее тело она может удержать. Это легко понять. Малый размер кольца ограничивает возможность прогиба пленки, и она может удержать меньшее по размеру тело. Если размер кольца, на которое натянута пленка очень большой, то вместо величины R (радиуса кольца, на которое натянута пленка) будет стоять величина L определяющая, на какое расстояние могли распространиться поверхностные волны вдоль поверхности пленки за время пролета τ тела на расстояние H . В типичном случае максимальная величина прогиба пленки от нескольких мм до сантиметра, скорость распространения

поверхностных волн порядка нескольких метров в секунду, величина L порядка нескольких см.

При выводе предыдущего соотношения мы пренебрегали сопротивлением воздуха при падении тела. Учтем теперь сопротивление воздуха. Это приведет к тому, что при падении с большой высоты скорость падения достигнет максимального значения v_{\max} и дальше нарастать не будет. Если эта установившаяся скорость получится меньше значения

$$v_0 = \sqrt{2gh} \quad (23)$$

то мыльная пленка задержит падающее тело.

Сила аэродинамического сопротивления воздуха

$$F_a = c\rho_e v^2 S \quad (24)$$

где v — скорость движения тела относительно воздуха

ρ_e — плотность воздуха

S — площадь поперечного сечения тела

c коэффициент порядка 1, зависящий от формы тела.

В установившемся режиме падения сила веса равна силе аэродинамического сопротивления

$$mg = c\rho_e v^2 S \quad (25)$$

Отсюда находим максимальную скорость падения. Для тела сферической формы получаем

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{8}{3c} \frac{\rho}{\rho_e} gr} \quad (26)$$

Приравнявая это значение максимальному значению скорости тела, которое может задержать мыльная пленка из выражения (23), получаем

$$\frac{3\sigma}{2g\rho r} \left(\ln \frac{R}{r} - 0.19 \right) - r \ln \frac{2R}{r} = \frac{4}{3c} \frac{\rho}{\rho_e} gr \quad (27)$$

Из уравнения (27) получаем максимальный размер тела, которое может

задержать мыльная пленка при падении с большой высоты. Видно, что этот

размер примерно в $\sqrt{\frac{\rho_e}{\rho}}$ раз меньше максимального размера покоящегося тела, которое может удержать пленка.

Экспериментальная проверка

Для проверки предидущих теоретических расчетов использовалась следующая установка. Проволочное кольцо диаметра 60 мм закреплялось в держателе так, что поверхность пленки располагалась горизонтально. Кольцо обмакивали в мыльный раствор (использовался раствор для мыльных пузырей от детской игрушки). Поверхностное натяжение пленки составляло 0.04 Н/м (измерялось методом определения массы отрывающихся капель при вытекании мыльного раствора из тонкой трубочки). В пипетку помещался мыльный раствор, из нее по каплям вытекал раствор в сосуд. Измерялась масса фиксированного числа капель. Аналогичная процедура производилась для воды. Отношение массы капель раствора к массе капель воды пропорционально отношению коэффициентов поверхностного натяжения раствора и воды. Зная коэффициент поверхностного натяжения воды (0.07 Н/м при 20С) получили указанное выше значение коэффициента поверхностного натяжения раствора. Относительная погрешность измерения коэффициента поверхностного натяжения составила 10% (за счет разброса массы фиксированного числа капель раствора и воды).

На кольцо с мыльной пленкой бросали с разной высоты различные мелкие предметы с нулевой начальной скоростью. Фиксировали проходит ли тело сквозь пленку или задерживается на пленке в зависимости от высоты над уровнем пленки. Высоту измеряли линейкой. Для эксперимента использовали несколько разных тел.

1. Крупинки крупы пшена диаметр крупинок 1 мм, плотность крупинок примерно 1 г в куб см
2. Крупинки кус куса (имели неправильную форму) максимальный размер примерно 0.7 мм, плотность крупинок примерно 1 г в куб см
3. Кубик из пеноплекса с размером грани 5 мм, плотность 30 кг в куб м
4. Кубик из пеноплекса с размером грани 3 мм, плотность 30 кг в куб м

При измерениях получили следующее:

Крупинки пшена задерживались пленкой при падении с высоты 10 мм и менее, не задерживались пленкой при падении с высоты 15 мм и более. Теоретическое значение максимальной высоты падения, с которой крупинка задерживается пленкой 13 мм.

Крупинки кус куса задерживались пленкой при падении с высоты 20 мм и менее, не задерживались пленкой при падении с высоты 40 мм и более. При падении с высот между 30 и 35 мм в некоторых случаях крупинки задерживались, а в некоторых пролетали сквозь фильтр. Теоретическое значение максимальной высоты падения, с которой крупинка задерживается пленкой 34 мм. Несферичность формы крупинок привела к тому, что в зависимости от ориентации крупинок при некоторых высотах они задерживались пленкой или пролетали сквозь нее.

Кубики из пеноплекса размером 5 мм задерживались пленкой при падении с высоты 60 мм и менее, не задерживались пленкой при падении с высоты 65 мм и более. Теоретическое значение максимальной высоты падения, с которой кубик задерживается пленкой 78 мм. Расхождение может быть связано с тем, что расчет выполнялся для падения тела сферической формы, при падении кубика форма мыльной пленки несколько отличалась. Поэтому реальное значение максимальной высоты может отличаться от расчетного для шара на численный коэффициент порядка 1.

Кубики из пеноплекса размером 3 мм задерживались пленкой при падении с высоты 150 мм и менее. Теоретическое значение максимальной высоты падения, с которой кубик задерживается пленкой 78 мм. Результат падения с больших высот не проверялся, так как большие высоты выходили за пределы шкалы линейки.

Во всех случаях получилось хорошее согласие результатов эксперимента с теоретическим расчетом.

Выводы.

1. Получена оценка максимального размера тела, которое может лежать на мыльной пленке. Показано, что этот размер зависит от плотности материала тела и его формы.
2. Получена оценка максимальной высоты падения тела при которой тело может быть задержано пленкой. Показано, что с точностью до логарифмического множителя максимальная высота обратно пропорциональна размеру тела и его плотности.

3. Показано что тела малого размера могут задерживаться пленкой при падении с любой высоты, найден максимальный критический размер падающего тела, при котором оно задерживается пленкой. Показано, что этот размер

примерно в $\sqrt{\frac{\rho_s}{\rho}}$ раз меньше максимального размера покоящегося тела, которое может удержать пленка.

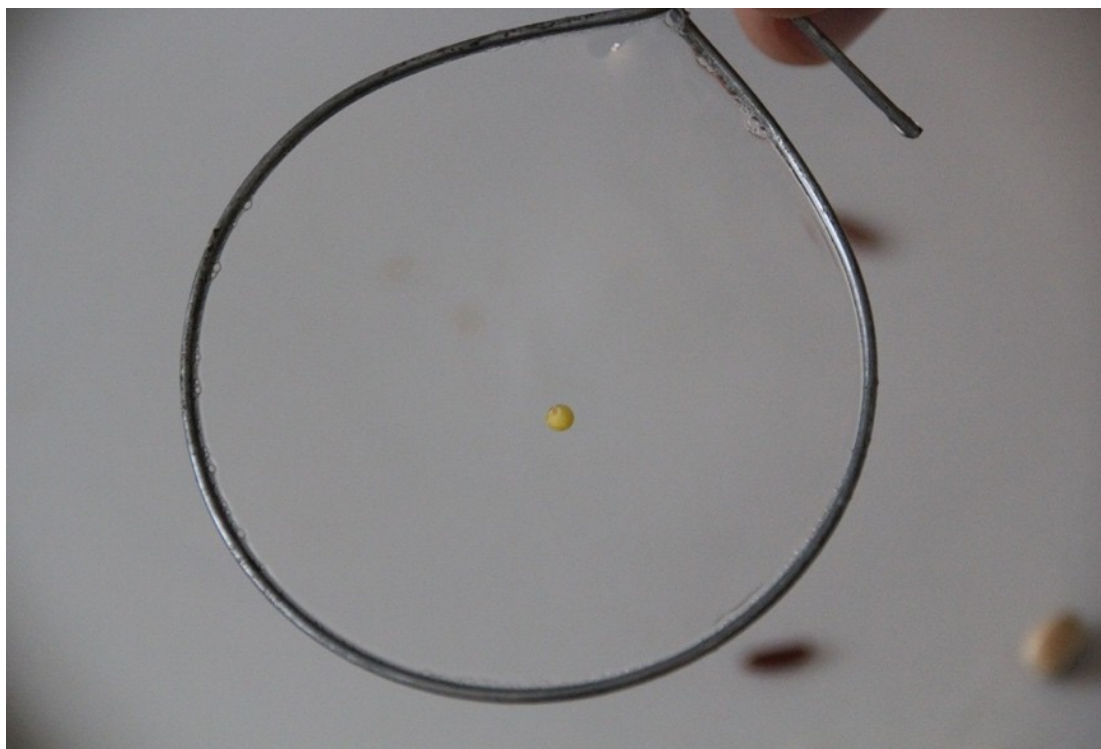
4. Выполнены эксперименты с удержанием пленкой мелких предметов. Результаты экспериментов согласуются с теоретическими расчетами.

Приложение к работе

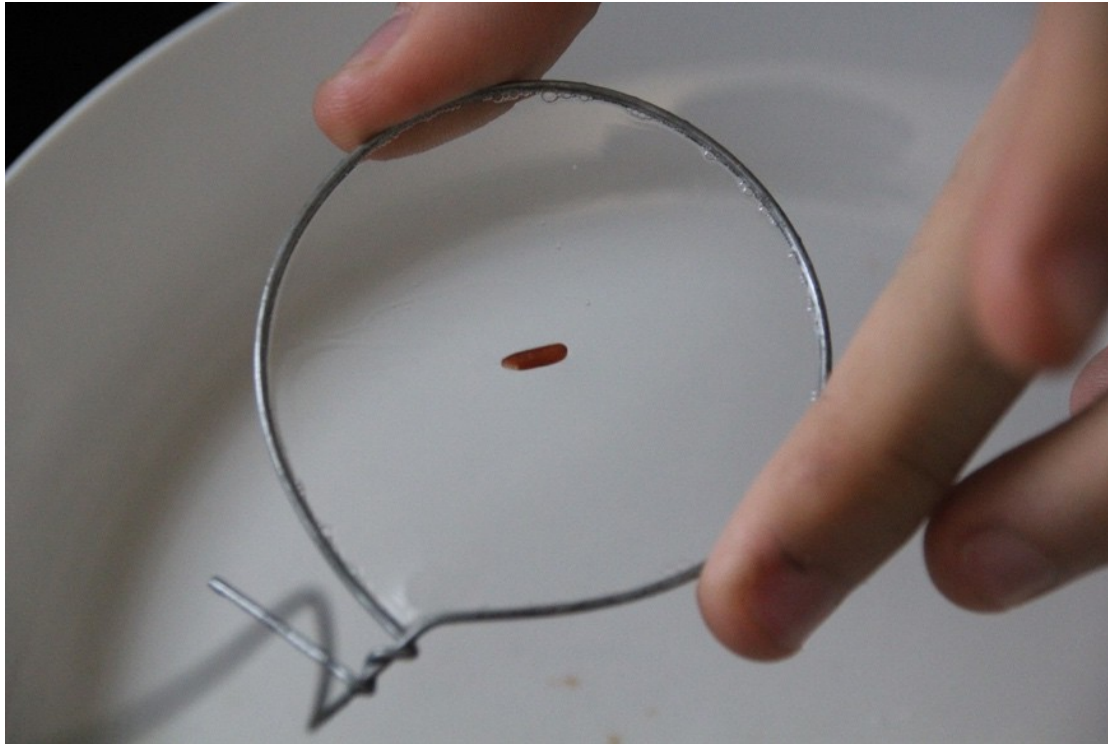
Список использованной литературы

1. Г.Я.Мякишев, Б.Б.Буховцев, Н.Н.Сотский Физика.Мсква, Просвещение , 2017.
2. <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BD%D0%BE%D0%B8%D0%B4> (<https://ru.wikipedia.org/wiki/Катеноид>)
3. Р. Курант, Г.Робинс Что такое математика ? п.11, МЦНИО, 2000.
4. А.Р.Ямпольский, Гиперболические функции. Физматгиз 1960
5. Г.Б. Двайт Таблицы интегралов и другие математические формулы. Мсква. Наука 1973.

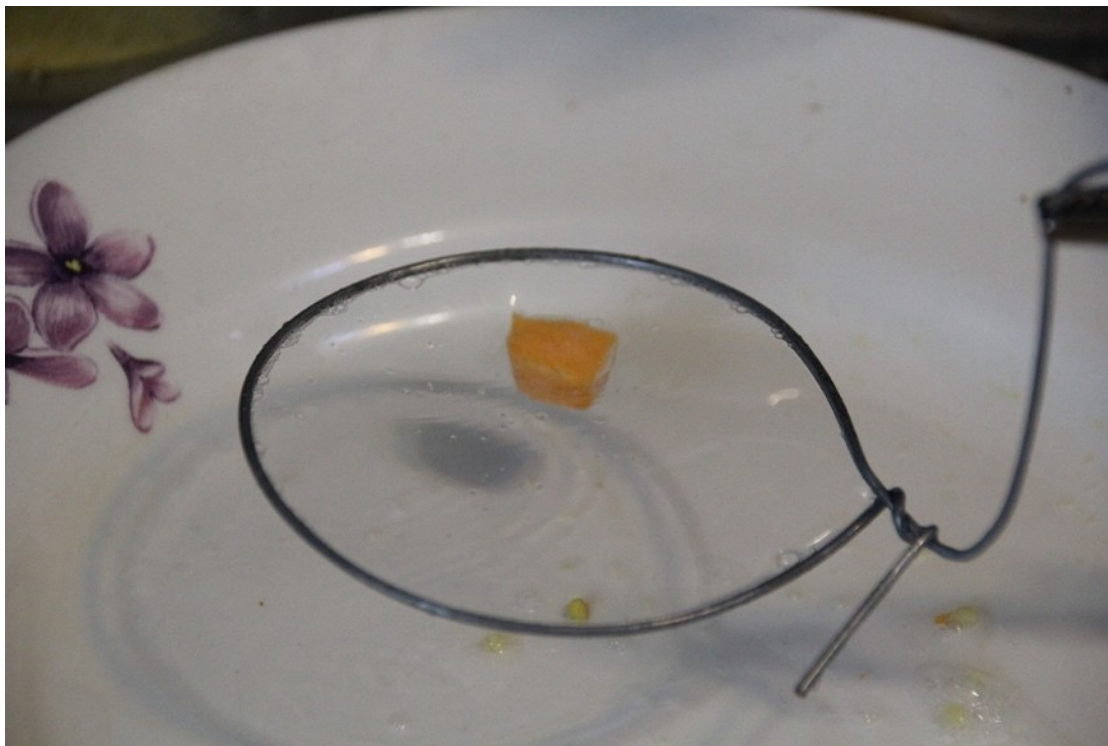
Приложение (Фото экспериментов)



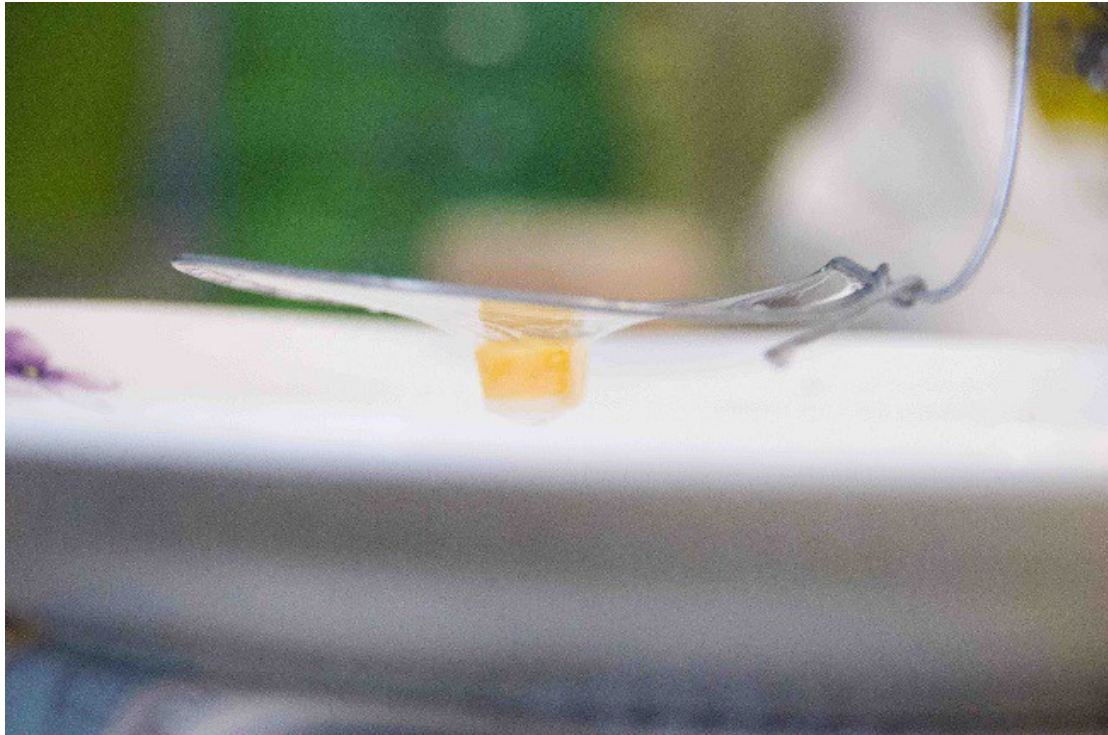
Просяное зерно на мыльной пленке



На рисунке рисовое зерно удерживается мыльной пленкой



Кубик из полиплекса на мыльной пленке, вид сверху



Кубик из полиплекса на пленке, вид сбоку. Видна деформация пленки