

Интернет-олимпиада 2019-2020 для 7-8 классов

Задача 1.

Автомат обрабатывает натуральное число N по следующему алгоритму:

1. Строится двоичная запись числа N без ведущих нулей.
2. Если в полученной записи единиц больше, чем нулей, то справа приписывается единица, в противном случае приписывается ноль.
3. Полученное число переводится в десятичную систему

Какое наименьшее четное число, превышающее 113, может получиться в результате работы этого автомата?

Ответ. 128

Решение

Представим число 113 в двоичной системе счисления:

1110001

Заметим, что во всех числах от 114 до 127 количество единиц во всех разрядах кроме младшего (он должен добавляться алгоритмом) больше, чем нулей. Значит автомат сможет получать только нечётные числа в этом диапазоне. А число 128 представляется как:

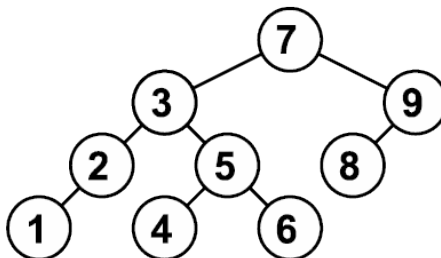
10000000

Тогда исходное число было:

1000000 и один 0 добавили.

Задача 2.

Рассмотрим бинарное дерево, у которого у каждой вершины ровно два потомка, за исключением вершин, потомками которых являются листья (лист может быть и один), а также самих листьев (у них нет потомков). Пример такого дерева приведен на рисунке:



Вычислите максимально возможную высоту такого бинарного дерева, состоящего из 2020 элементов. Высотой дерева называется количество вершин на пути от корня до максимально удаленного от него листа, включая их. Высота дерева на рисунке равна 4.

Ответ. 1011

Решение

Заметим, что у корня обязательно 2 потомка. Так как мы хотим максимальную глубину, то пусть у нас все оставшиеся вершины будут только у одного потомка, а у второго потомка не будет вершин. Аналогично рассматривается и потомок с оставшимися вершинами. Здесь надо не забыть, что на первом и последнем уровне ровно по 1 вершине, а на всех промежуточных по 2.

Задача 3.

В марсианском алфавите всего пять различных букв, а все слова марсианского языка состоят ровно из четырех букв, при этом, две одинаковые буквы ни в каком слове не могут стоять рядом. Сколько всего слов в марсианском языке?

Ответ. 320

Решение

Давайте строить слово слева направо. Тогда первой буквой может стоять одна из 5 букв. Второй буквой не может стоять такая буква, которая стоит первой. Значит одна из 4 букв. Третья буква не должна совпадать со второй, значит тоже 4 варианта. Аналогично для последней буквы. Заметим, что при таком выборе у нас гарантируется, что соседние буквы не совпадают. Итоговое количество вариантов: $5 * 4 * 4 * 4$

Задача 4.

Исполнитель стоит на клетчатом поле. Исполнитель может выполнять команды вправо, влево, вверх, вниз. При выполнении любой из этих команд исполнитель перемещается на одну клетку соответственно вправо \rightarrow , влево \leftarrow , вверх \uparrow , вниз \downarrow по полю. Все клетки, через которые проходит исполнитель (включая начальную и конечную), он помечает. Дана программа для этого исполнителя:

```
НАЧАЛО
  ПОВТОРИТЬ 2020 РАЗ
    вправо
    вправо
    влево
    вверх
    вниз
    вниз
  КОНЕЦ
КОНЕЦ
```

Сколько клеток будет помечено в результате выполнения этой программы?

Ответ. 6062

Решение

Для решения можно построить первый шаг. После первого шага окажется 5 закрашенных клеток в виде крестика (робот окажется в точке P1):

	*	
*P0	*	*
	*P1	

Про моделируем следующий шаг робот окажется в точке P2:

	*		
*	*	*	
	*P1	*	*
		*P2	

Заметим, что за одну итерацию цикла робот будет закрашивать 3 новых клетки. Так как робот движется в одном направлении (вправо-вниз), то все циклы будут закрашивать ровно по 3 клетки. Итоговый ответ 5 (первый шаг) $+ 3 * 2019$ (все последующие шаги).

Задача 5.

У вас есть строка. Над ней разрешается выполнять следующие два типа операций.

1. Добавить в любое место два одинаковых символа. Например: AA → ABBA, AA → CCAA.
 2. Удалить подстроку вида XYX, где X и Y — различные символы. Например: VABA → A, VABA → B, но вы не можете удалить CCC, потому что символы должны быть различными.
- С помощью какого минимального количества таких операций вы можете из строки "ABC" сделать пустую строку?

Решение. ABC → ABCBB → AB → BBAB → BAABAB → VAB → пустая строка. За меньшее число операций ответ получить нельзя, так как для удаления каждой из трех различных букв придется добавить две таких же, а чтобы сократить 9 символов нужно как минимум три действия.

Ответ: 6