Обобщение теоремы Штейнера для шаблона в виде полукруга

Орлова Екатерина Михайловна

10 класс, Специализированный учебно-научный центр (факультет) — школа-интернат имени А.Н. Колмогорова МГУ имени М.В. Ломоносова,

г. Москва, Россия

Научный руководитель: Верещагин Борис Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент, учитель математики Мурманского академического лицея

В геометрическом образовании школьников большое внимание уделяется задачам на построение. Это связано с тем, что при решении различных геометрических задач прежде всего используются свойства геометрических конструкций. А построение этих конструкций – самый эффективный способ изучения их свойств. Кроме этого, при решении геометрических задач на вычисление или на доказательство равенства фигур, часто пользуются алгоритмом построения соответствующей задачи.
В работе исследуется разрешимость таких задач с помощью шаблона в виде полукруга. (Такой шаблон выбран потому, что изучение конструкций, связанных с окружностями, вызывает у учеников наибольшие затруднения).

Будем считать, что полукруг – это инструмент, обладающий следующими свойствами (аксиомы полукруга):

1. Можно построить отрезок, равный диаметру шаблона;
2. Дугу окружности с радиусом шаблона ($r_ш$);
3. Продлить любой отрезок и, соответственно, найти точку пересечения двух прямых

Цель исследования – обобщить теорему Штейнера для шаблона в виде полукруга.
Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

- Рассмотреть алгебраический метод решения задач на построение
- Исследовать алгоритм решения задач на построение полукругом

В работе показано, что для шаблона выполняется аксиома линейки и предложено построение точки на произвольном луче с началом в центре окружности, заданной центром и радиусом; найдены способы построения однородных функций первой степени – таким образом, дважды доказано обобщение теоремы Штейнера для полукруга. Также рассмотрено решение некоторых задач на построение с использованием шаблона.

Все полученные результаты являются новыми. Они могут быть рассмотрены на уроках геометрии, на занятиях кружков и спецкурсов, а также в исследовательской работе школьников при решении аналогичных проблем для других шаблонов.

Список использованных источников:

1. Базылев В. Т. и Дуничев К. И. Геометрия : Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов / В.Т. Базылев, К.И. Дуничев – М. «Просвещение», 1975
2. Научная библиотека избранных естественно-научных изданий. – Режим доступа http://know.alnam.ru/book_gpl.php?id=60

§1. Обобщение теоремы Штейнера для шаблона в виде полуокружности

Пользуясь только линейкой, нельзя решить всякую задачу, разрешимую с помощью циркуля и линейки. Но справедлива

Теорема Штейнера. Всякая геометрическая задача на построение, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена одной линейкой, если на плоскости построена какая-либо окружность и отмечен её центр.

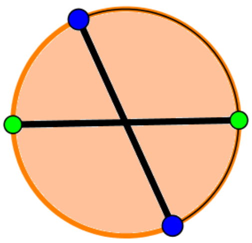
Окружность считается построенной, если построен ее центр, отрезок, равный радиусу, и можно построить точку, лежащую на любом луче, выходящем из центра.

Теорема 1. (обобщение теоремы Штейнера) Всякая геометрическая задача на построение, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена шаблоном в виде полукруга.

Замечание. Ниже будем обозначать данные фигуры – синим цветом; искомые - красным.

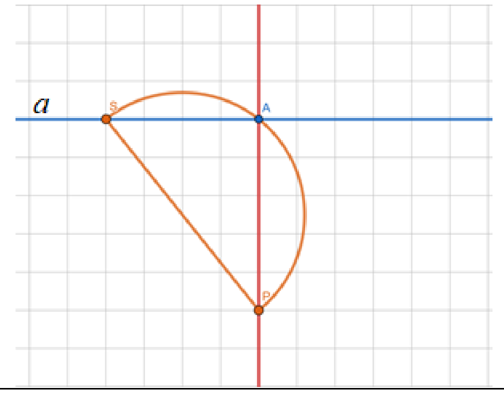
Доказательство

С помощью полукруга легко построить окружность с центром (иллюстрация приведена ниже).



Более сложной проблемой является решение задачи - показать, что для нашего шаблона выполняется аксиома линейки. То есть, нужно показать, как с помощью полукруга провести прямую, проходящую через две данные точки. Решение этой задачи состоит из нескольких более легких.

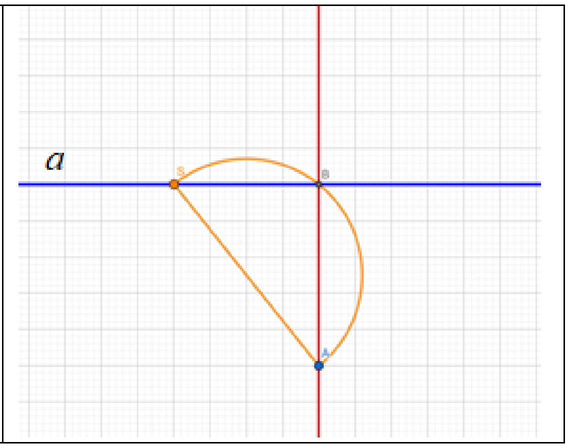
Задача 1.1. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной прямой.

а) Точка А лежит на данной прямой Построение 1. *a*, A; 2. S ∈ *a;* 3. P | S; A; P принадлежат шаблону; 4. AP.	

б) Точка А лежит вне прямой (близко)

Построение

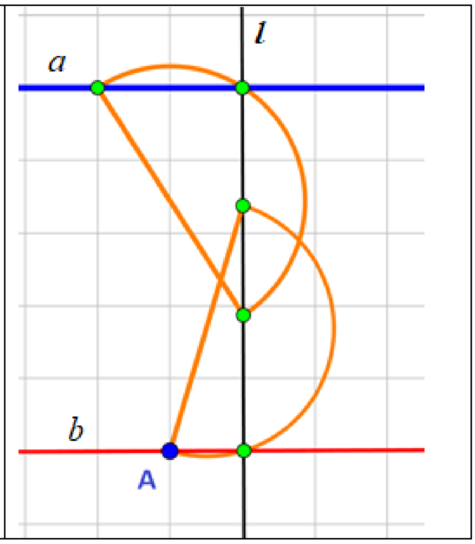
1. a, A;
2. S ∈ a | SA – диаметр шаблона;
3. $B | \{B\} = \smile SA \cap a$;
4. BA.



Задача 1.2. Через данную точку А провести прямую, параллельную данной прямой.

Построение

1. a, A;
2. $l \perp a$;
3. $b \perp l \mid A \in b$



Задача 1.1.в. Точка А лежит вне прямой (далеко)

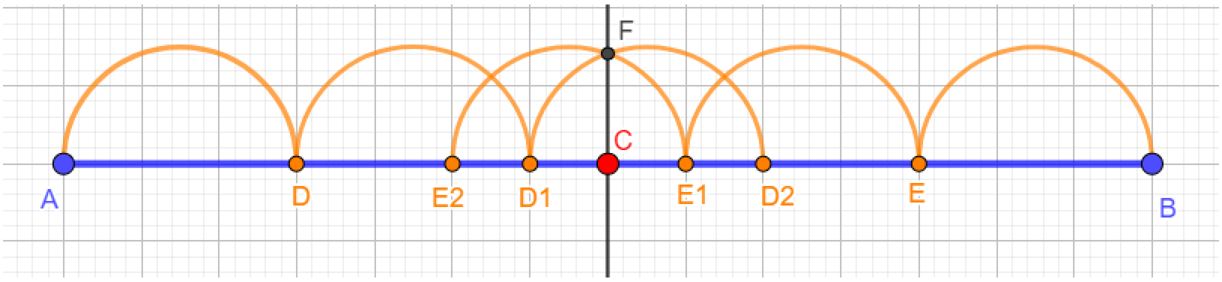
Пусть данная прямая k и точка А далеко от нее. По задаче 1.2 проведем прямую m, параллельную k так, чтобы точка А была близко. По задаче 1.1(а или б) опустим перпендикуляр из А на m. Затем этот перпендикуляр продолжим до пересечения с k.

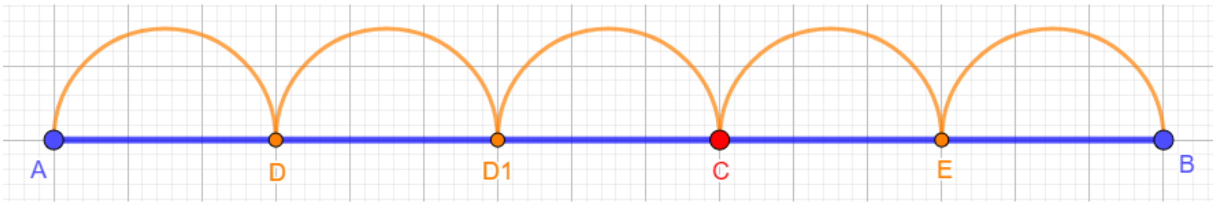
Задача 1.3. Разделить данный отрезок пополам.

Пусть дан отрезок АВ, нужно найти его середину С.

1. Откладываем от концов отрезка АВ отрезки AD, BE, DD_1, EE_1 и т.д., равные диаметру шаблона, пока $\smile E_{i-1}E_i$ не пересечется с $\smile D_{i-1}D_i$; если E_i совпадает с D_j, точка D_j – искомая

2. $\smile E_{i-1}E_i \cap \smile D_{i-1}D_i = \{F\}$
3. FC ⊥ AB; FC ∩ AB = {C}
4. C – искомая



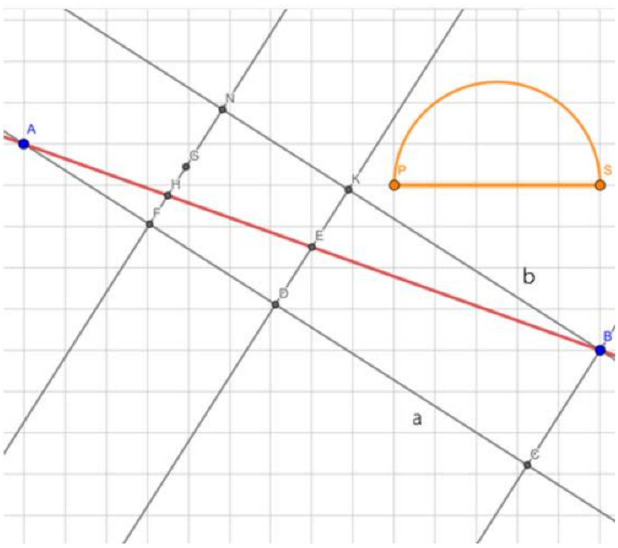


Следствие 1.1. Построить серединный перпендикуляр данного отрезка.

Решение.

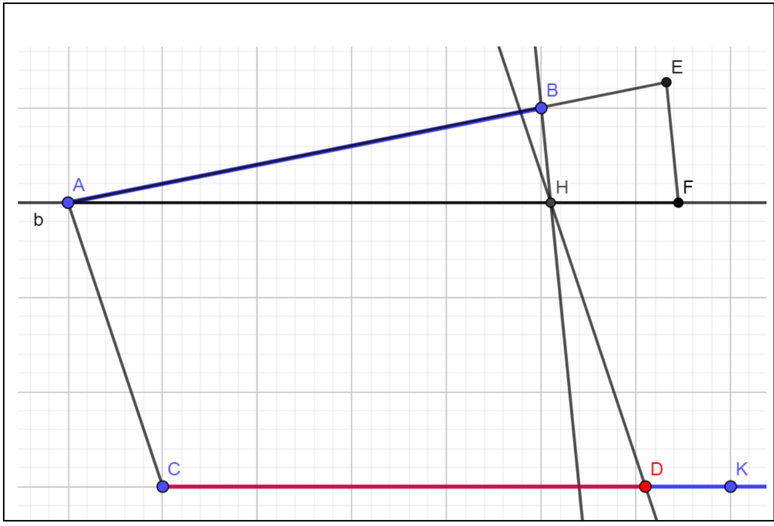
1. Строим середину отрезка по задаче 1.3
2. Проводим перпендикуляр к данному отрезку через его середину по задаче 1.1.а

Задача 1.4. Провести прямую через две данные точки А и В.

	1. Прямая a; A ∈ a 2. BC ⊥ a; BC ∩ a = {C} 3. Прямая b ⊥ BC; B ∈ b 4. D ∈ AC; AD = DC 5. DK ⊥ AC; DK ∩ b = {K} 6. E ∈ DK; DE = EK 7. Если AE > PS, то аналогично п.4 – 6: 8. F ∈ AD; AF = FD 9. FN ⊥ AD; FN ∩ b = {N} 10. G ∈ FN; FG = FN 11. H ∈ FN; FH = HG 12. Если AH > PS, то аналогично п. 4 – 6; иначе: 13. AH – прямая 14. AH – искомая

Таким образом, мы показали, что для нашего шаблона выполняется аксиома линейки. Осталось показать, что можно построить точку на произвольном луче с началом в центре окружности, заданной центром и радиусом.

Задача 1.5. На данном луче от его начала С построить отрезок, равный данному отрезку АВ.



1. b - прямая, b ∥ CK, A ∈ b
2. AE = PS, E ∈ AB
3. AF = PS, F ∈ b
4. EF – отрезок
5. BH ∥ EF
6. AC – отрезок
7. HD ∥ AC
8. HD ∩a = {D}
9. CD – искомый

Следствие 1.2. Построить окружность с данным центром, данным радиусом

Решение. Если есть центр окружности, луч с началом в этом центре и отрезок, равный радиусу окружности, то точку окружности на этом луче строим как в *задаче 1.5*.

Таким образом, все условия теоремы Штейнера для нашего шаблона выполнены, а значит, *теорема 1* доказана.

§2 Алгебраический метод

Пусть x – длина некоторого отрезка X, и $x = F(a;b;c;...)$. Тогда необходимым условием для того, чтобы F задавало длину отрезка, является однородность первой степени этой функции, то есть для нее должно выполняться равенство $F(ta;tb;tc;...) = tF(a;b;c;...)$.

В книге В.Т.Базылева стр.106 доказана теорема: для того, чтобы функция $f(a;b;c;...)$, где $a;b;c;...$ - длины данных отрезков, определяла длину одного и того же отрезка при любом выборе единичного отрезка, необходимо и достаточно, чтобы это выражение было однородным первой степени.

К таким функциям относятся:

1. $x = a + b$
2. $x = a - b$
3. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$
4. $x = \dfrac{ab}{c}$
5. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$
6. $x = \sqrt{ab}$
7. $x = \dfrac{m}{n}a$, где m, n – натуральные числа.

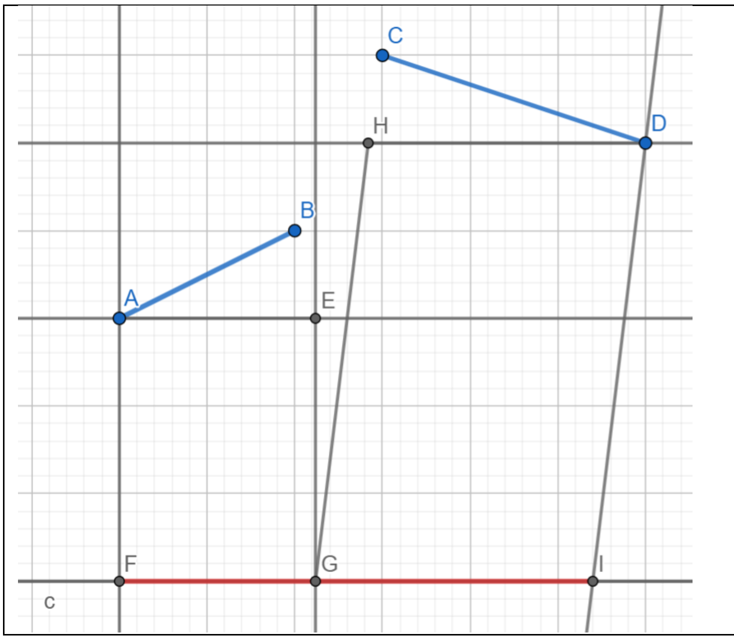
Там же показано, что построение отрезка $x = f(a;b;c;...)$ сводится к построению конечного множества вспомогательных отрезков, заданных формулами 1 – 7.

Теорема 2. Для того, чтобы отрезок X, заданный функцией $x = f(a;b;c;...)$, где $a;b;c;...$ - длины данных отрезков, можно было построить шаблоном в виде полукруга, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(a;b;c;...)$ была однородной первой степени.

Доказательство:

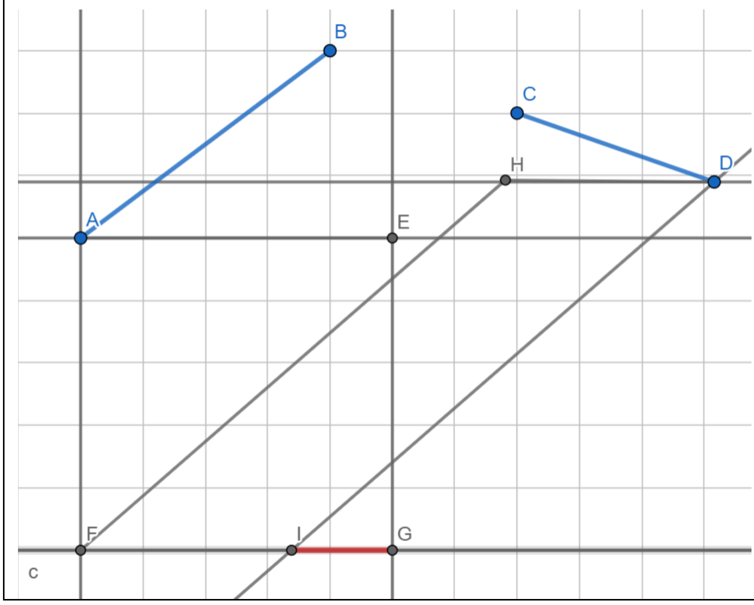
Для доказательства достаточно показать, что задачи 1 – 7 можно решить нашим шаблоном.

Задача 2.1. Построить отрезок $x = a + b$



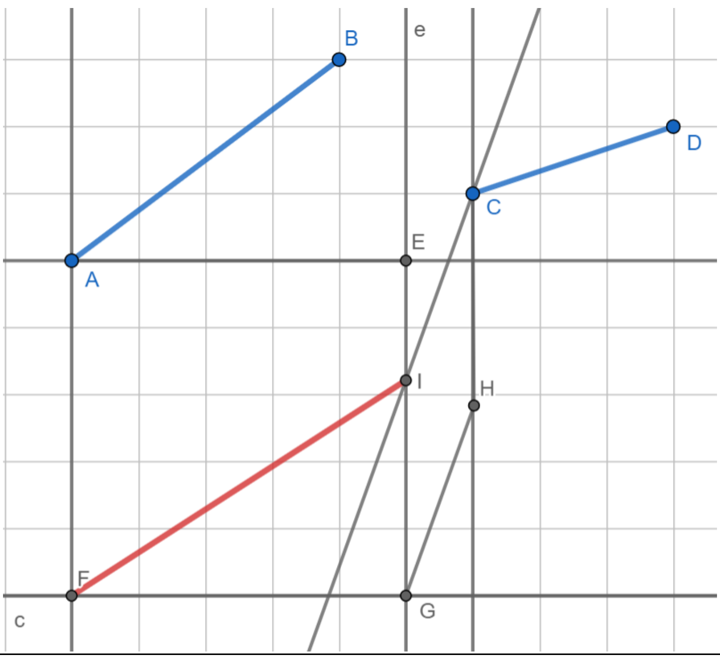
1. c – прямая
2. FG = AB; F ∈ c; G ∈ c
3. GI = CD; I ∈ c
4. FI – искомый

Задача 2.2. Построить отрезок $x = a - b$



1. c – прямая
2. FG = AB; F ∈ c; G ∈ c
3. FI = CD; I ∈ c
4. IG – искомый

Задача 2.3. Построить отрезок $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

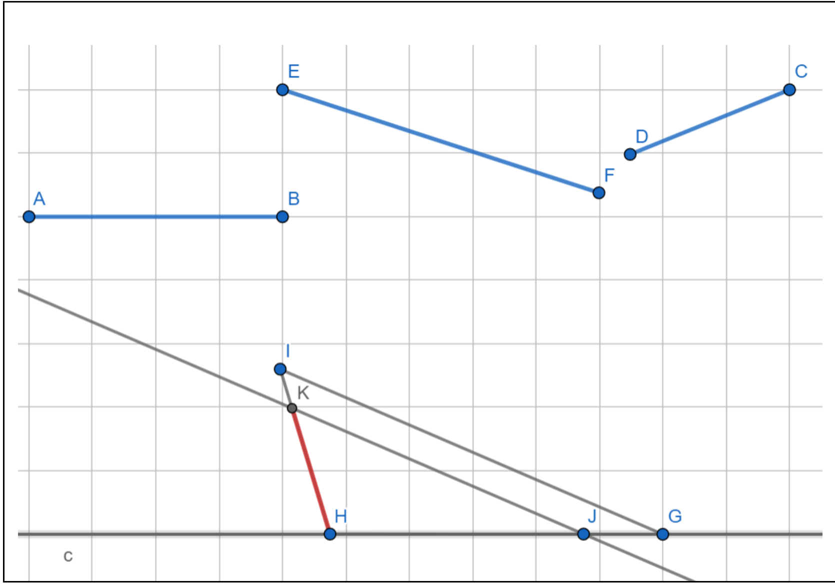


1. c – прямая
2. FG = AB; F ∈ c; G ∈ c
3. e ⊥ c; G ∈ e
4. GI = CD; I ∈ e
5. FI – искомый

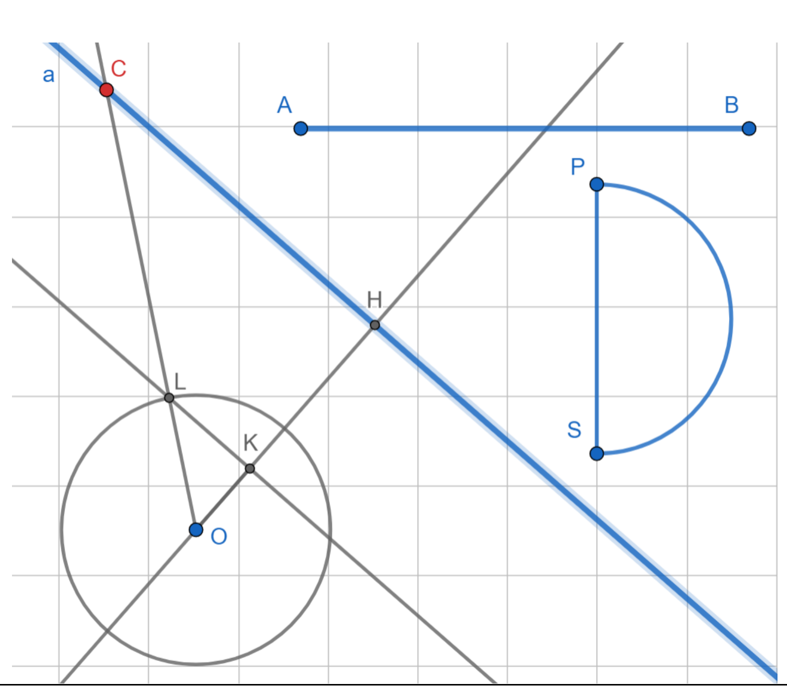
Следствие 2.1. Построить прямоугольный треугольник по двум катетам.

Решение. В задаче 2.4 построен треугольник FGI по двум катетам FG и GI.

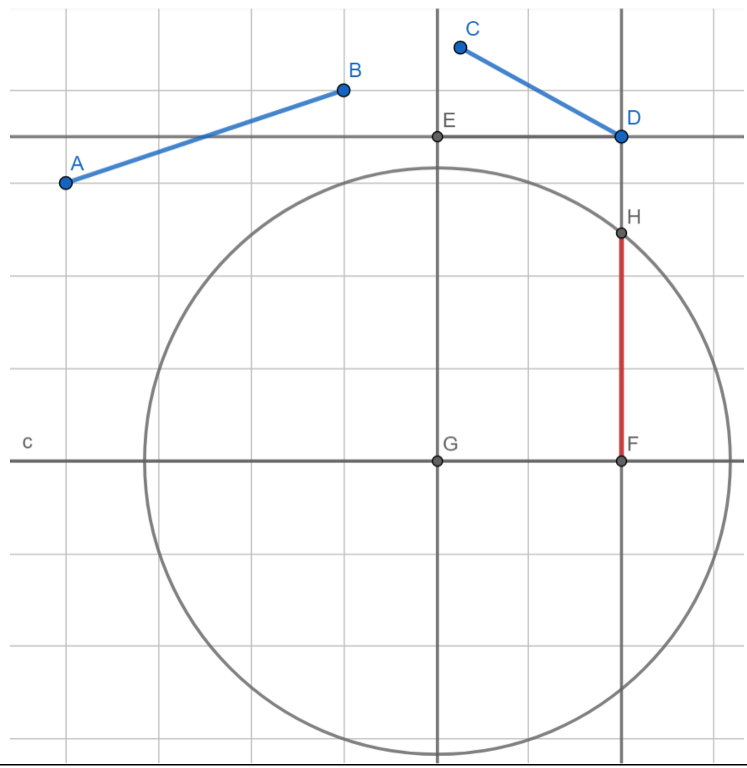
Задача 2.4. Построить отрезок $x = \frac{ab}{c}$

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>1. c – прямая
2. G ∈ c
3. HG = EF; H ∈ c
4. HI = CD
5. HJ = AB; J ∈ c
6. GI – отрезок
7. JK ∥ GI; JK ∩IH = {K}
8. KH – искомый</td>
</tr>
</table>

Задача 2.5.1. Построить точку пересечения окружности данного центра, данного радиуса и прямой, не проходящей через центр.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>1. OH ⊥ a, OH ∈ a = {H}
2. OK = $\frac{r_ш \cdot OH}{R}$
3. KL ⊥ OH, HL ∩ Окр$_ш$ = {L}
4. OL – луч
5. OL ∩ a = {C}
6. C - искомая</td>
</tr>
</table>

Задача 2.5.2. Построить отрезок $x = \sqrt{a^2 - b^2}$

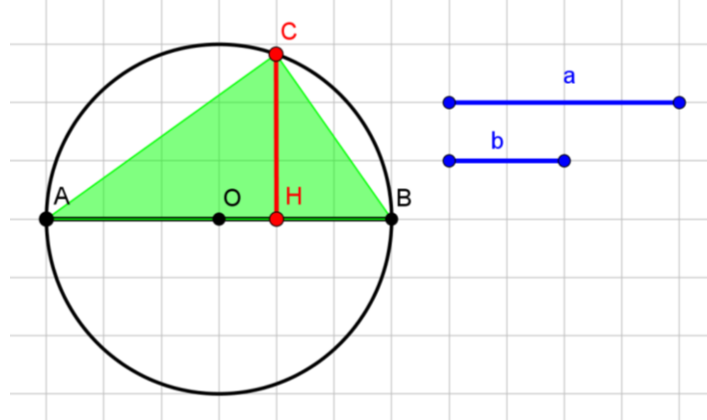


1. c – прямая
2. DF ⊥ c; DF ∩c = {F}
3. GF = CD; G ∈ c
4. Окр (G; AB) ∩DF = {H}
5. FH – искомый

Следствие 2.2. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

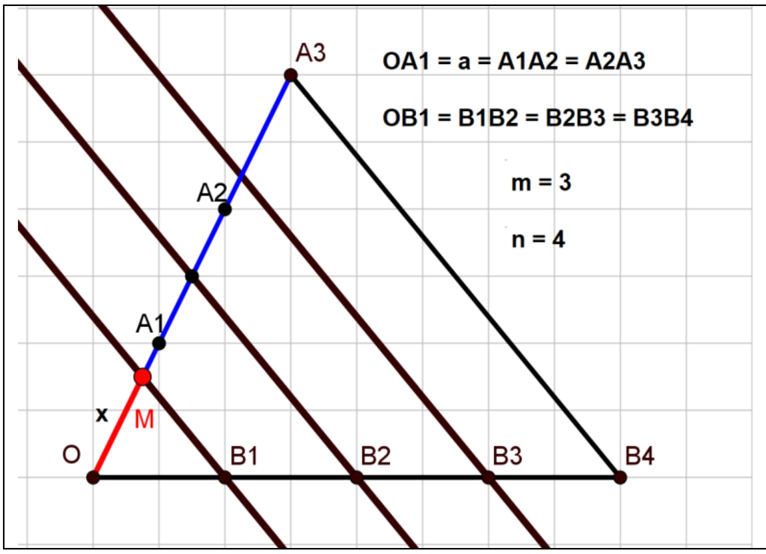
Решение. В задаче 2.5 построен треугольник FHG по гипотенузе GH и катету FG.

Задача 2.6. Построить отрезок $x = \sqrt{ab}$



1. AB = a + b; AH = a; BH = b
2. AO = OB; O ∈ AB
3. HC ⊥ AB
4. Окр (O; OA) ∩HC = {C}
5. CH – искомый

Задача 2.7. Построить отрезок $x = \frac{m}{n} a$, где m, n – натуральные числа.



1. $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = a$
2. $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$
3. A_3B_4 – отрезок
4. $B_3C_3 \parallel A_3B_4$
5. $B_2C_2 \parallel A_3B_4$
6. $B_1M \parallel A_3B_4$
7. OM – искомый

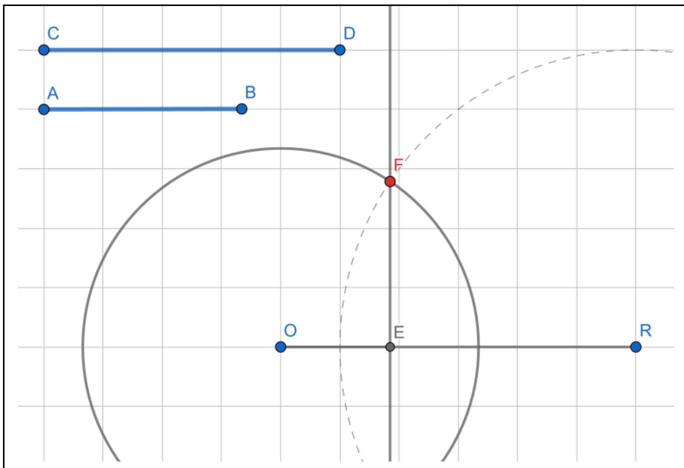
Таким образом, задачи 1 – 7 нашего параграфа решены с помощью шаблона в виде полукруга. Это означает, что *теорема 2* доказана.

§3 Описание процесса решения задач на построение, разрешимых циркулем и линейкой, с помощью полукруга

При решении задач на построение циркулем и линейкой мы строим

1. Прямую, проходящую через 2 данные точки (задача 1.4)
2. Окружность с данным центром, данным радиусом (следствие 1.2)
3. Точку пересечения двух прямых (аксиома 4)
4. Прямой и окружности (задача 2.5.1)
5. Двух окружностей

Задача 3.5. Построить точку пересечения двух окружностей с данными центрами и радиусами



1) $\mathbf{AB = r_1;\ \ CD = r_2}$
2) $\mathbf{OR = d;\ \ OE = x}$
3) $\mathbf{OE^2 = r_1^2 - d^2}$
4) $FE^2 = r_2^2 - (d - x)^2 = r_2^2 - d^2 + 2dx - x^2$
5) $r_1^2 - x^2 = r_2^2 - d^2 + 2dx - x^2$
6) $2dx = r_1^2 - r_2^2 + d^2$
7) $x = \dfrac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}$
8) $\mathbf{x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r_1^2}{d} - \frac{r_2^2}{d} + d\right)}$

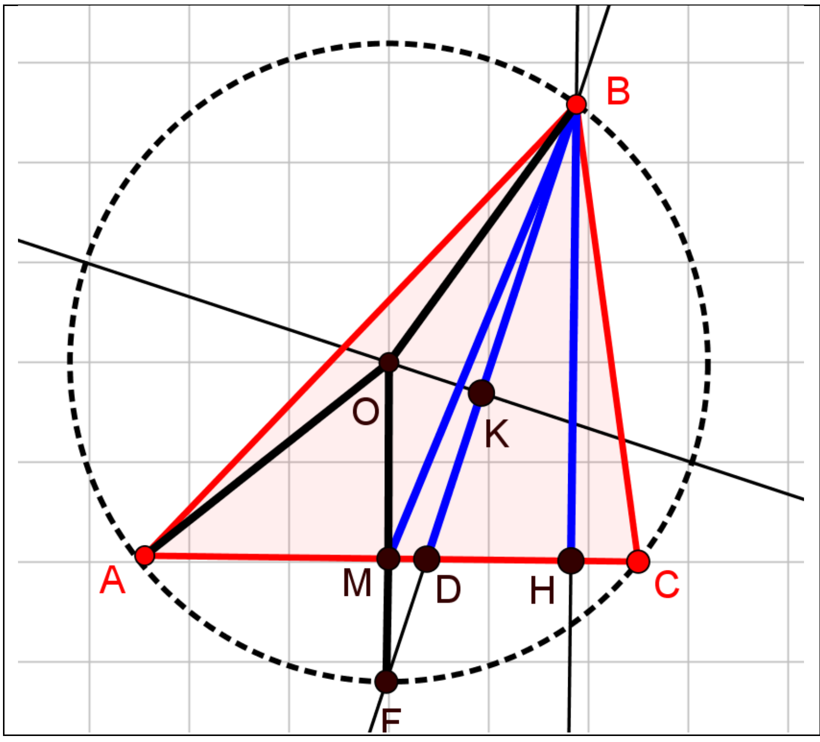
1. OE = x (задача 2.4, задача 2.1, задача 2.2, задача 1.3)

	2. EF ⊥ OR; EF ∩Окр (O; AB) = {F} 3. F – искомая

Мы рассмотрели общую схему процесса решения задач на построение, разрешимых циркулем и линейкой, с помощью полукруга. Тем самым мы еще раз доказали обобщение теоремы Штейнера для полукруга. Кроме этого, мы видим, как алгоритм решения задач на построение циркулем и линейкой используется при решении тех же задач с помощью полукруга. В качестве примера ниже приведено решение достаточно сложной задачи.

Задача

Построить треугольник ABC по высоте BH, биссектрисе BD и медиане BM

 	Дано: $BH = h_b$ - высота; $BD = b_B$ - биссектриса; $BM = m_b$ - медиана

Алгоритм построения

1. ΔBHD (следствие 2.2)
2. ΔBHM (следствие 2.2)
3. $l \,|\, l \perp HM\,;\, M \in l$ (следствие 1.1.а)
4. $\{ F \} = BD \bigcap l$ (задача 3.3)
5. k - сер. пер. к FB (следствие 1.1)
6. $\{O\} = k \bigcap l$ (задача 3.3)
7. ΔOMA (следствие 2.2)
8. ΔOMC (следствие 2.2)
9. ΔABC - искомый

Заключение

В данной работе приведено обобщение теоремы Штейнера для полукруга (два доказательства), рассмотрен алгебраический метод решения задач на построение нашим шаблоном и исследовано построение алгоритма решения задач полукругом. Все полученные результаты являются новыми. Они могут быть рассмотрены на уроках геометрии, на занятиях кружков и спецкурсов, а также в исследовательской работе школьников при решении аналогичных проблем для других шаблонов.

Список литературы

3. Базылев В. Т. и Дуничев К. И. Геометрия. Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. М. «Просвещение», 1975
4. Научная библиотека избранных естественно-научных изданий. – Режим доступа http://know.alnam.ru/book_gpl.php?id=60