3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ, решения

Математика

8 класс

1. В классе учатся 24 школьника. Каждый день учитель вывешивает на доску почёта фотографии трёх лучших учеников по итогам дня. Могло ли так оказаться, что спустя 100 дней фотографии любых двух учеников висели вместе на доске почета не более одного раза?

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что это случилось. Всего в классе $\frac{24 \cdot 23}{2} = 276$ пар учеников. За один день учитель вешает на доску почёта фотографии трёх пар учеников. Тогда за 100 дней на доске почёта побывают фотографии 300 пар учеников, но их всего 276. Противоречие.

2. Лёня плохо учится в школе, поэтому складывает дроби следующим образом: сумму числителей дробей делит на сумму их знаменателей. Он сложил две различные несократимые дроби a/b и c/d (a и c — целые числа, b и d — натуральные). Результат оказался ровно в 2 раза меньше, чем правильный ответ. Докажите, что Лёня не мог складывать дроби, у которых $b \neq d$.

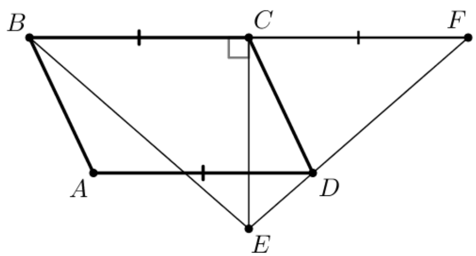
Решение. Запишем соотношение, заданное условием:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 2 \cdot \frac{a+c}{b+d} \quad \Leftrightarrow \quad ad(b+d) + bc(b+d) = 2bd(a+c) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad ad^2 - abd - bcd + b^2c = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad ad(d-b) + bc(b-d) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (d-b)(ad-bc) = 0\,.$$

Отсюда либо $b = d$, либо $ad = bc$, то есть $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, что невозможно по условию. Таким образом, $b = d$.

3. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A. Прямая, проходящая через точку C перпендикулярно BC, пересекает прямую, проходящую через точку D параллельно AC, в точке E. Докажите, что EC — биссектриса угла BED.

Решение. Продлим прямую DE до пересечения с прямой BC в точке F.



Заметим, что $ACFD$ — параллелограмм, поэтому $AD = CF$. Но $AD = BC$, поэтому C является серединой отрезка BF. Тогда EC — медиана и высота в треугольнике BEF, поэтому он равнобедренный, то есть EC является ещё и биссектрисой угла BEF, что и требовалось доказать.

4. Маша написала в тетрадке одиннадцать раз цифру 2. Далее она делает следующее: выбирает два числа a и b из тетрадки, стирает их, и записывает вместо них либо $a + b$, либо ab. Может ли она получить в итоге число 766?

Ответ. Не могла.

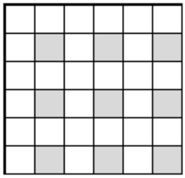
Решение. Сначала заметим, что сумма двух натуральных чисел, больших единицы, не превосходит их произведения, следовательно, при проведении данных операций с n двойками не могло получиться число, большее 2^n.

Допустим, она могла получить число 766. Рассмотрим последнюю операцию. Поскольку 766 не делится на 4, то эта операция не могла быть умножением. Значит, последняя проведённая операция — это сложение. Тогда одно из слагаемых больше 387, то есть больше $2^8 = 256$, поэтому, чтобы получить это число, было задействовано хотя бы 9 двоек. Поэтому второе слагаемое «построено» не более чем из двух двоек, то есть равно 4 или 2. Первый случай не подходит, потому что тогда первое слагаемое не превосходит $2^9 = 512$, то есть общая сумма не превосходит $512 + 4 = 516$. Во втором случае нам нужно получить число 764 из 10 двоек. Аналогично предыдущему, последнее действие не может быть сложением (иначе получится число, меньшее 764), поэтому это умножение, и мы сводим всё к задаче получить число 382 из 9 двоек (так как $382/2 = 191$ — простое число, то по-другому получить 764 с помощью умножения невозможно). Это число не делится на 4, оно может быть получено только сложением. Но сложением его не получить опять по аналогичным соображениям: для большего слагаемого потребуется не меньше 7 двоек, а если посмотреть на то, каким маленьким при этом оказывается второе слагаемое, то не меньше 8, а значит, ровно 8 двоек. Самое большое число, которое можно получить из 8 двоек — это 256, и сумма опять слишком мала.

5. Имеется клетчатый квадрат 101×101. Два человека играют в следующую игру: первый игрок закрашивает в красный цвет по клеточкам произвольный квадрат 1×1, а второй — синим цветом квадрат 2×2, никакую клетку нельзя красить дважды. Если у второго нет возможности сходить, то все остальные клеточки закрашивает первый. Выигрывает тот, кто закрасит больше клеток. Первый игрок ходит первым. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Выигрывает первый игрок.

Решение. Отметим на доске клетки, которые стоят на пересечении строк и столбцов с чётными номерами (см. рис.). Пусть каждым своим ходом первый игрок пока может будет закрашивать отмеченную клетку. Заметим, что любой квадрат 2×2 содержит ровно одну отмеченную клетку, поэтому каждым своим ходом второй игрок также будет закрашивать ровно одну отмеченную клетку. После того, как все отмеченные клетки будут закрашены, второй игрок не сможет сделать ход, поэтому все оставшиеся клетки закрасит первый игрок.



Общее число отмеченных клеток равно $50 \times 50 = 2500$, поэтому каждый из игроков закрасит по 1250 отмеченных клеток, то есть второй игрок закрасит суммарно $1250 \cdot 4 = 5000$ клеток. Всего клеток на доске $101^2 > 2 \cdot 5000$, поэтому второй закрасит меньше половины клеток, то есть первый победит.