3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ, решения

Математика

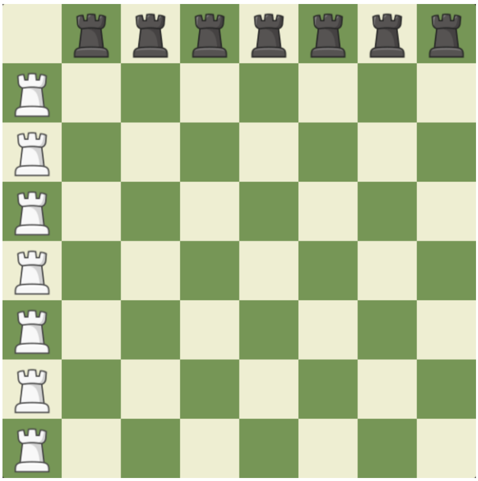
7 класс

1. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы белые не били никого (ни белых, ни черных) по горизонтали, а черные — по вертикали?

Ответ. 14.

Решение. Заметим, что ладей белого цвета не может быть больше 8, иначе в какой-то строке будет стоять 2 ладьи, что противоречит условию. Если белых ладей 8, то в каждой строке будет стоять по белой ладье, поэтому больше ладей быть не может. Аналогично если ладей чёрного цвета хотя бы 8, то всего ладей 8. Если же ладей каждого цвета не больше 7, то всего ладей не больше 14.

Пример расстановки 14 ладей:



2. **(a)** Клетки таблицы 3×9 раскрасили в два цвета: чёрный и белый. Докажите, что можно найти четыре одноцветных клетки таких, что их центры образуют прямоугольник.
(b) Клетки таблицы 3×7 раскрасили в два цвета: чёрный и белый. Докажите, что можно найти четыре одноцветных клетки таких, что их центры образуют прямоугольник.

Решение. В первом пункте заметим, что число всевозможных раскрасок столбца из трёх клеток в два цвета равно 8. Поскольку в таблице 9 столбцов, то хотя бы два из них имеют одинаковую раскраску. В столбце из трёх клеток обязательно есть две одноцветные клетки. Взяв одноцветные клетки в одном столбце и рассмотрев соответствующие им клетки в другом столбце, получим прямоугольник с вершинами в одноцветных клетках.

Во втором пункте заметим, что чтобы условие не выполнялось, если в таблице есть одноцветный столбец (пусть чёрный), то во всех остальных столбцах не может быть больше одной чёрной клетки (иначе образуется нужный прямоугольник). Но тогда оставшихся столбцов не более 4, поэтому всего столбцов не более 5. Если же одноцветных столбцов нет, то всего в таблице не более 6 столбцов. Поэтому в таблице 3×7 обязательно найдётся одноцветный прямоугольник.

3. За столом по кругу сидят 143 человека, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый из них произнёс фразу: «Следующие k человек, сидящие после меня по часовой стрелке, лжецы». При каких натуральных $1 < k < 143$ это возможно?

Ответ. k может равняться 10, 12, 142.

Решение. Заметим, что за столом должен сидеть хотя бы один рыцарь, иначе все лжецы сказали правду. Рассмотрим этого рыцаря. Он сказал правду, поэтому все, кто сидит после него, являются лжецами. Рассмотрим следующего за рыцарем человека. Он является лжецом, поэтому должен сказать неправду. Но следующие за ним $k-1$ человек — это лжецы, поэтому следующий за ними человек должен быть рыцарем. Рассуждая аналогично, получим, что весь круг разбивается на последовательности из рыцаря и k лжецов за ним. Таким образом, 143 должно делиться на $k+1$. Поскольку $143 = 11 \cdot 13$, то $k+1$ может быть равно любому из чисел 11, 13, 143, то есть k может быть равно 10, 12, 142.

Примеры, почему указанные числа подходят, были, по факту, описаны в ходе решения: блоки из $k+1$ человека (рыцарь и k лжецов после него). Несложно видеть, что в этом случае все условия выполнены.

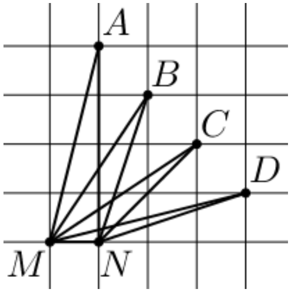
4. Маша написала в тетрадке десять раз цифру 2. Далее она делает следующее: выбирает два числа a и b из тетрадки, стирает их, и записывает вместо них либо $a+b$, либо ab. Может ли она получить в итоге число 998?

Ответ. Не могла.

Решение. Сначала заметим, что сумма двух натуральных чисел, больших единицы, не превосходит их произведения, следовательно, при проведении данных операций с n двойками не могло получиться число, большее 2^n.

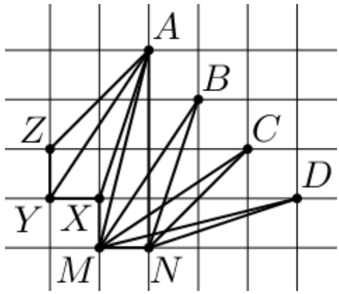
Допустим, она могла получить число 998. Рассмотрим последнюю операцию. Поскольку 998 не делится на 4, то эта операция не могла быть умножением. Значит, последняя проведённая операция — это сложение. Но тогда большее из складываемых чисел превосходило 500, поэтому оно было получено операциями с 9 двойками, так как $2^8 = 256 < 500$. Но тогда меньшее число равно 2, и сумма не превосходит $512 + 2 = 514$. Противоречие.

5. На плоскости расположены четыре треугольника с вершинами в вершинах клеток с общим основанием MN. Найдите сумму углов этих треугольников при вершинах A, B, C, D.



Ответ. 45°.

Решение. Переместим треугольники так, как показано на рисунке. Другими словами, отметим точки X, Y, Z так, чтобы были равны пары треугольников BMN и AYX, CMN и AYZ, DMN и AMX.



Углы, сумму которых необходимо посчитать, при этом образуют угол ZAN, который, очевидно, равен 45° (например, это видно из квадрата со стороной 2, для которого AZ будет диагональю).