Третий тур олимпиады для 9-10 классов

Предпочтительная форма оформления работы – создание одного файла с решениями всех заданий, которые вы выполните (в том числе можно создать один файл из рукописных сканов работ). В этом случае за работу **начисляется один дополнительный балл**. Если, дополнительно, все решения, включая формулы, таблицы и другие необходимые для иллюстрации решения элементы, были набраны в текстовом редакторе (процессоре), то **начисляется еще один балл**.

Каждое задание само по себе вне зависимости от способа оформления оценивается из 6 баллов. В том числе **баллы снимаются за недостаточную строгость** обоснования даже при наличии правильного ответа.В некоторых задачах в качестве обоснования можно использовать текст компьютерной программы.

1. Как известно, запись числа в большинстве позиционных системах счисления определяется *базисом* и набором *цифр*, которые могут использоваться в каждом из разрядов (в некоторых системах счисления в каждом из разрядов используется свой набор цифр). Рассмотрим двоично-десятичную систему, которая относится к классу смешанных P-Q-ичных систем счисления. В этой системе счисления каждая цифра числа в десятичной записи заменяется на ее двоичное представление в четырех разрядах (исключение составляет старшая цифра, там можно оставлять только значащие двоичные цифры). Например, 2019_{10} = $10\ 0000\ 0001\ 1001_{2\text{-}10}$ (здесь пробелы добавлены лишь для удобства). Выпишите базис этой системы счисления (10 первых элементов базиса для натуральных чисел и принцип его формирования для произвольных чисел, в том числе дробных). Ответ обосновать.

Решение.

Для обратного преобразования из двоично-десятичной формы в десятичное число нужно разбить на четверки все знаки двоичного кода: от запятой влево – в целой части и вправо – в дробной части. Затем каждую четверку двоичных цифр заменить на соответствующую десятичную цифру.

В данном случае, каждый новый десяток будет вносить множитель 10 в базис относительного предыдущего десятичного числа. Внутри одного десятка базис будет строиться исходя из двоичной системы счисления. В результате для целой части числа получаем

1, 2, 4, 8, 10, 20, 40, 80, 100, 200, 400, 800, 1000, 2000, 4000, 8000, 10000 и т.д.

Базис для дробной частиполучается аналогично:

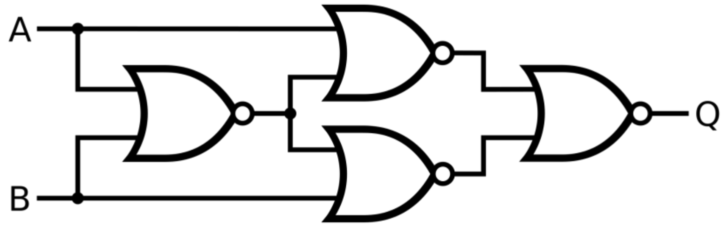
0.8, 0.4, 0.2, 0.1, 0.08, 0.04, 0.02, 0.01 и т.д.

2. Нарисуйте комбинационную схему, состоящую из как можно меньшего количества логических элементов NOR (notor) для выражения логической функции двух переменных: *A*and*B*or (not*A*) and (not*B*).
Другие логические элементы использовать нельзя. Помимо рисунка схемы, напишите цепочку тождественных преобразований, для выражения данной функции через операцию NOR.

Решение.Преобразуем формулу:

$$\overline{A}\cdot\overline{B}\,V A\cdot B=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}\,V\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot B\,V A\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}\,V A\cdot B=\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\,V A\right)\cdot\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\,V B\right)=$$

$$\overline{\overline{\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\,V A\right)}}\cdot\overline{\overline{\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\,V B\right)}}=\overline{\overline{\overline{A\,V B}\,V A}\,V\overline{\overline{A\,V B}\,V\,B}}$$



3. Паша и Вова играют в следующую игру. Им дается число n. Они ходят по очереди и Паша ходит первым. На своем ходу игрок выбирает число d так, что d — натуральное число от 1 до n–1 и d — делитель n (исключение – число 1, для него можно выбрать d = 1 и выиграть). После этого d вычитается из n. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает. Определите, для каких натуральных n Петя гарантированно выигрывает при оптимальной игре вне зависимости от игры Вовы? Ответ обосновать.

Решение. Для n = 1 игра заканчивается в один ход (выигрывает Паша). При n = 2 первый ход может быть только 1, после вычитания единицы останется число 1, поэтому на следующем ходу выигрывает Вова. При n = 3 единственный ход также равен 1 и Вова оказывается в проигрышной позиции. При n = 4 есть два хода, выигрышный из которых 2 – Вова опять окажется в проигрышной позиции. При n = 5 единственный ход приводит к выигрышу второго игрока (позиция проигрышная), тогда 6 – выигрышная и т.д. Так как все делители нечетных чисел нечетны, то из нечетного числа можно перейти только в позицию с четным числом, а такая позиция для всех n> 2 выигрышная, но уже для второго игрока, поэтому нечетные позиции для n>3 проигрышные, а четные – выигрышные, так как из них всегда можно перейти в позицию n – 1 (проигрышную для второго игрока).
Ответ. Паша выигрывает при n = 1, 3, 4, 6, 8 и для всех четных чисел больше 8.

4. Встретились *7* гостей. Известно, что каждый гость решил подарить подарок другому гостю так, что каждый гость получит один подарок. Сколько существует различных вариантов получения подарков гостями при таких условиях? Комбинация считается отличной от других, если хотя бы один гость получил подарок от другого гостя.Ответ обосновать.
Решение. Эта задача эквивалентна подсчету числа перестановок, в которых никакой элемент не появляется на своем месте. Пусть первый гость дарит подарок гостю i. Существует n – 1 способ сделать это. Далее есть два варианта: гость i дарит подарок гостю 1 или другому гостю. В первом случае мы свели задачу к той же, но для n – 2 гостей, а во втором для n – 1 гостя и n – 1 подарка, так как один из гостей подарок уже получил. Таким образом, ответ для nгостей выражается так:

f(n) = (n-1)(f(n-1) + f(n-2))

f(1) = 0

f(2) = 1

f(3) = (3-1)(1+0) = 2

f(4) = (4-1)(2+1) = 9

f(5) = (5-1)(9+2) = 44

f(6) = (6-1)(44+9) = 265

f(7) = (7-1)(265+44) = 1854

Ответ:1854

5. Номер билета из *n* цифр, где *n*чётное, называется “почти счастливым”, если в нем сумма первых *n*/2 цифр ровно на единицу отличается от суммы остальных цифр. Например, 123005 или 123700. Номер может начинаться с любого числа нулей. Определите количество “почти счастливых билетов” для следующих значений *n*:

1) *n* = 6

2) *n* = 10

3) *n* = 20

4) *n* = 100

Опишите, как именно вы получили соответствующие значения.

Решение.

Для начала решим задачу простым способом: заметим, что для первого случая достаточно посчитать просто: перебрать все номера и для каждого из них проверить условие задачи.

Для второго случая можно запустить ту же программу. На Pythonона будет работать где-то 1000 секунд. Либо можно её ускорить. Заметим, что нам не обязательно перебирать все билеты. Если для каждого возможногоs знать количество способов получить сумму цифр sу чисел длиной n/2, то тогда ответ можно будет получать следующим способом: для любого из наборов, дающего сумму s, можно будет взять любой из наборов с суммойs – 1 и s + 1. Пусть соответствующие значения получены в массиве a, тогда для очередного sбудет a[s] * (a[s - 1] + a[s + 1])“почти счастливых” билетов.А ответом на задачу будет являться сумма по всем таким s. Заметим, что для подсчёта количества вариантов нам будет достаточно пробежаться только по одной половине билета. Таким образом мы сможем решить подзадачу 2 быстро. Или даже подзадачу 3, но программа будет считать долго.
Для решения на полный балл используется ещё одна оптимизация. Если знать количество способов для всех сумм цифр sчисел длины i– 1, то для длины iможно легко пересчитать эту сумму. Заметим, что для каждой суммыsчисел длины i – 1 (обозначим ее a[i-1][s])мы можем приписать ровно одну из 10 цифр, тогда a[i-1][s] нужно будет прибавить к ответу для i-ой длины с суммамиs, s+1, s+2,…,s+9.

Ответы на задачу можно получить с помощью следующей программы

```
n = int(input()) // 2

max = 9*n

a = [[0]*(9*n+1) for i in range(n+1)]
```

```
for i in range(10):
a[1][i] = 1
for i in range(2,n+1):
for s in range(9*n + 1):
for k in range(10):
ifk+s<= max:
a[i][k+s] += a[i-1][s]
ans = 0
for i in range(1,max):
ans += a[n][i]*(a[n][i-1]+a[n][i+1])
ans+=a[n][0]*a[n][1]+a[n][max]*a[n][max-1]
print(ans)
```

Ответы:

1)109494

2) 860000900

3) 6145751601061480800

4)277195334834500944669228740375357778944913131715952295846893641728073727377808583283711688841134000