# 3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

## Математика

*9 класс*

**1.** Найдите количество делящихся на 9 четырехзначных чисел таких, что все их цифры различны и нечетны.

**Ответ:** 24.

**Решение.** Легко видеть, что число состоит из цифр 1, 3, 5, 9, расставленных в произвольном порядке (только в этом случае сумма цифр, а значит и само число, делится на 9). Число способов произвольно расставить четыре цифры на четыре места равно $4! = 24$.

**2.** Найдите все пары целых $x$ и $y$ такие, что

$$x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 + 3x + 3y = 9.$$

**Ответ:** $x = 1$, $y = 2$ либо $x = 0$, $y = 3$.

**Решение.** Выделим полные кубы:

$$(x + 1)^3 + (y - 1)^3 = 9.$$

Пусть $u = x + 1$ и $v = y - 1$.

Если числа $u$ и $v$ одного знака, то они оба положительные и меньше 3. Тогда это числа 1 и 2. Имеем $x = 2$, $y = 1$ либо $x = 0$, $y = 3$.

Если $u$ и $v$ разного знака, то пусть положительное равно $s$, а отрицательное равно $-t$. Имеем:

$$s^3 - t^3 = 9.$$

Если $s < 3$, то $s^3 - t^3 < 9$. Если же $s \geqslant 3$, то расстояние до ближайшего меньшего куба равно $3s^2 - 3s + 1 \geqslant 19 > 9$.

Осталось заметить, что ни $u$, ни $v$ не могут быть равны 0.

**3.** На плоскости проводят $n$ прямых, делящих плоскость на некоторое число конечных и бесконечных частей. При каком наименьшем $n$ число конечных частей может оказаться больше, чем число бесконечных?

**Ответ:** При $n = 7$.

**Решение.** Если все прямые параллельны, то количество конечных областей равно 0, и условие не выполнено.

Пусть не все прямые параллельны. Тогда все их точки пересечения можно накрыть достаточно большим кругом. Все наши прямые пересекают круг и высекают на его границе $2n$ дуг. Каждая дуга лежит в какой-то бесконечной области. Различные дуги лежат в различных бесконечных областях. Действительно, если дуги отсекаются лучами хотя бы трех прямых, то утверждение очевидно. Если же две дуги отсекаются двумя прямыми $a$ и $b$, то либо $a$ пересекает $b$ внутри круга, либо $a$ и $b$ параллельны и найдется прямая $c$, пересекающая обе внутри круга. Осталось заметить, что каждая бесконечная область содержит хотя бы одну дугу. Из сказанного следует, что число бесконечных областей равно числу дуг и равно $2n$.

Теперь докажем по индукции, что число конечных областей не больше $(n-2)(n-1)/2$. База для $n = 3$ верна. Пусть теперь утверждение верно для $n = k$ прямых, и у нас есть произвольный набор из $k+1$ прямой. Временно уберем произвольную прямую $l$. Оставшиеся прямые образуют не более $(k-2)(k-1)/2$ конечных областей по предположению. Если $l$ параллельна всем остальным прямым, то конечных областей нет и неравенство верно. Иначе оставшиеся прямые высекают на $l$ два луча и не более $k-1$ отрезка. Каждый из лучей делит бесконечную область на две бесконечных. Каждый из отрезков может поделить либо конечную область на две конечные, либо бесконечную область на две области, среди которых не более одной конечной. Итого число конечных областей увеличилось на не более чем $k-1$. Имеем

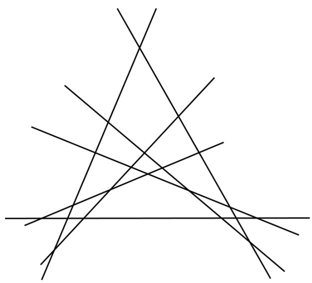
$$\frac{(k-2)(k-1)}{2} + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}\,.$$

и неравенство доказано.

Легко видеть, что при $n < 7$

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2} < 2n\,.$$

При $n = 7$ строится пример:



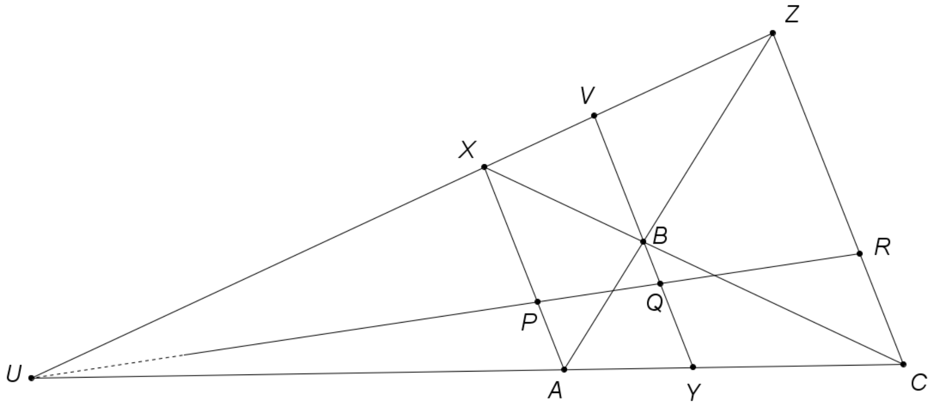
**4.** Дан треугольник $ABC$. Три параллельные прямые $AX$, $BY$ и $CZ$ пересекаются с прямыми $BC$, $AC$ и $AB$ в точках $X$, $Y$ и $Z$ соответственно. На отрезках $AX$, $BY$, $CZ$ выбрали точки $P$, $Q$, $R$ так, что

$$AP : PX = BQ : QY = CR : RZ = 1 : k\,.$$

При каких значениях $k$ точки $P$, $Q$, $R$ лежат на одной прямой?

**Ответ:** $k = 2$.

**Решение.** Одна из точек $X, Y, Z$ лежит на стороне треугольника, две другие – на продолжениях сторон. Будем считать, что $Y$ лежит внутри $AC$.




Пусть продолжения боковых сторон трапеции $AXZC$ пересекаются в точке $U$, а $V$ – точка пересечения прямых $BY$ и $XZ$. Так как $AP : PX = CR : RZ$, то точки $P$, $R$, $U$ лежат на одной прямой. Но тогда прямая $PQR$ проходит через $U$, следовательно, $YQ : QV = k$. Так как $VY$ параллельна основаниям трапеции $AXZC$, то $VB = BY$. Из последних двух равенств и условия $BQ : QY = k$ находим $k = 2$.

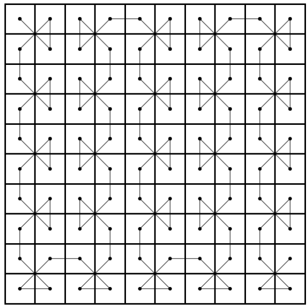
**5.** Дано клетчатое игровое поле размерами $n \times n$. На какую-то клетку игрового поля ставят фишку, которой можно совершать ходы двух типов: фишку можно передвинуть на произвольную клетку, которая имеет общую сторону с текущей клеткой, или же на произвольную клетку, которая имеет с текущей клеткой общую вершину, но не общую сторону. Два последовательных хода всегда должны быть различных типов. Найти все натуральные числа $n > 1$, при которых можно выбрать начальную клетку и последующие ходы так, чтобы фишка побывала на каждой клетке игрового поля ровно один раз и закончила в клетке, отличной от начальной.

**Ответ:** $n$ четные.

**Решение.** Покажем сначала, что при нечетных $n$ требуемый обход невозможен.

Предположим противное. Все клетки квадрата кроме одной (начальной либо конечной клетки маршрута) можно разбить на пары соседних по вершине, и при этом соседних на маршруте. Покрасим все клетки в четных столбцах в синий цвет, а все клетки в нечетных столбцах в красный цвет. Тогда красных клеток на $n$ больше, чем синих. С другой стороны, в каждой паре клетки покрашены в разные цвета, а значит количества клеток синего и красного цвета отличаются на 1. Противоречие.

Пример для $n = 10$ изображен на картинке.



Примеры для других четных $n$ устроены также: достаточно попеременно склеить полоски, изображенные ниже.