3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

Математика

10 класс

1. Учитель записал на доске равенство $a + b - ab = 1$ и спросил: «Что можно сказать про число b, если известно, что a — нецелое?»
Даша сказала: «Число b тоже нецелое».
Маша сказала: «Нет, наверное, оно целое и положительное».
Глаша сказала: «А я думаю, что оно целое отрицательное».
Кто из девочек прав?

Ответ. Права Маша.

Решение. Заметим, что записанное равенство преобразуется к виду

$$(a-1)(b-1) = 0.$$

Так как a нецелое, то первый множитель не равен 0, а значит $b = 1$.

2. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 2019. На прямой AC отмечены точки M и N так, что $\angle MBN = 135°$. Найдите наименьшую возможную длину отрезка MN.

Ответ. $2019(2+\sqrt{2})$.

Решение. Заметим, что отрезок AC содержится внутри отрезка MN, поскольку иначе $\angle MBN < 135°$. Можно считать, что точка M лежит на луче CA, а N – на луче AC. Так как

$$\angle MAB = \angle MBN = \angle BCN = 135°\,,$$

то треугольники MAB и BCN подобны треугольнику MBN, а значит подобны между собой. Из подобия треугольников MAB и BCN получаем

$$\frac{MA}{AB} = \frac{BC}{CN} \;\Leftrightarrow\; MA \cdot CN = AB \cdot BC = 2019^2\,.$$

Так как $MA + CN \geqslant 2\sqrt{MA \cdot CN}$, то

$$MN = MA + AC + CN \geqslant 2019(2+\sqrt{2})\,,$$

причём равенство достигается при $MA = CN = 2019$.

3. Найти наибольшее значение выражения $\sin(\cos x) + \cos(\sin x)$ и все числа x, при которых это наибольшее значение достигается.

Ответ. $\sin(1) + 1$; $x = 2\pi k$, где k – любое целое.

Решение. Обозначим $f(x) = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$. Заметим, что функция $f(x)$ периодичная с периодом 2π и четная, поэтому достаточно найти ее максимум на отрезке $[0, \pi]$. Для этого рассмотрим ее поведение на отрезках $[0, \pi/2]$ и $[\pi/2, \pi]$.

- На отрезке $[0, \pi/2]$ синус возрастает и принимает значения на отрезке $[0, 1]$. Косинус убывает на отрезке $[0, 1]$, следовательно функция $\cos(\sin x)$ убывает.

  Аналогично, на отрезке $[0, \pi/2]$ косинус убывает и принимает значения на отрезке $[0, 1]$. Синус возрастает на отрезке $[0, 1]$, следовательно функция $\sin(\cos x)$ убывает.

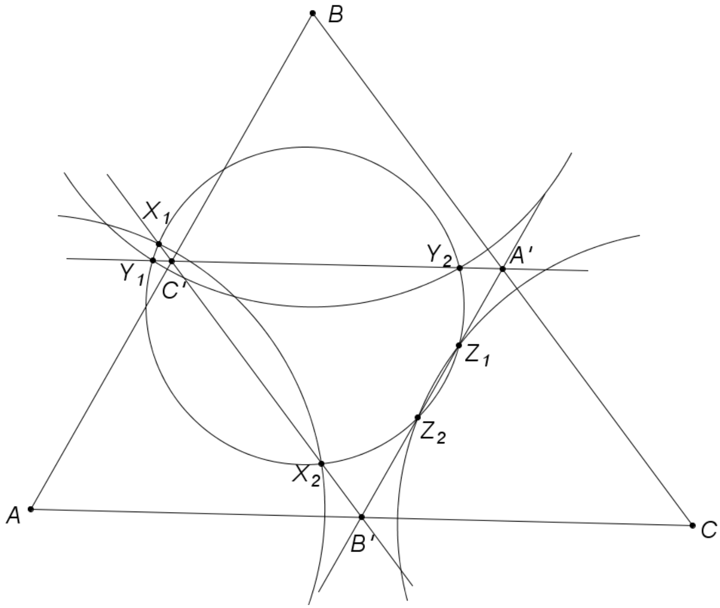
  Значит, $f(x)$ убывает на отрезке $[0, \pi/2]$. Максимальное значение на этом отрезке достигается при $x = 0$ и равно $f(0) = \sin(1) + 1$.

- На отрезке $[\pi/2, \pi]$ функция $\sin(\cos x)$ неположительна, а $\cos(\sin x)$ не превосходит 1. Значит, на этом отрезке $f(x) = \sin(\cos x) + \cos(\sin x) \leqslant 0 + 1$. Так как $f(0) > 1$, то максимум $f(x)$ на отрезке $[\pi/2, \pi]$ меньше максимума на отрезке $[0, \pi/2]$.

4. Точка H – точка пересечения высот треугольника ABC, точки A', B' и C' – середины сторон BC, CA и AB соответственно. Окружность ω с центром в точке H пересекает прямую $B'C'$ в точках X_1 и X_2, прямую $C'A'$ — в точках Y_1 и Y_2, прямую $A'B'$ — в точках Z_1 и Z_2. Докажите, что

$$AX_1 = AX_2 = BY_1 = BY_2 = CZ_1 = CZ_2\,.$$

Доказательство. Заметим, что треугольники AHX_1 и AHX_2 равны (это следует из того, что $AH \perp B'C'$), следовательно $AX_1 = AX_2$. Аналогично $BY_1 = BY_2$ и $CZ_1 = CZ_2$. Построим три окружности: ω_A с центром в точке A и радиусом $R_A = AX_1 = AX_2$; ω_B с центром в точке B и радиусом $R_B = BY_1 = BY_2$; ω_C с центром в точке C и радиусом $R_C = CZ_1 = CZ_2$. Докажем, что построенные окружности равны друг другу.



Докажем сначала $R_A = R_B$.

Предположим сначала, что точка C' лежит снаружи ω. Запишем цепочку равенств:

$$AC'^2 - R_A^2 = C'X_1 \cdot C'X_2 = C'Y_1 \cdot C'Y_2 = C'B^2 - R_B^2.$$

Действительно, первые два выражения равны степени точки C' относительно окружности ω_A; второе и третье выражения равны степени точки C' относительно окружности ω; третье и четвертое выражения равны степени точки C' относительно окружности ω_B. Теперь равенство $R_A = R_B$ следует из $AC' = BC'$.

Пусть теперь точка C' лежит внутри окружности ω. Тогда цепочка равенств меняется:

$$AC'^2 - R_A^2 = -C'X_1 \cdot C'X_2 = -C'Y_1 \cdot C'Y_2 = C'B^2 - R_B^2.$$

Из нее по-прежнему следует $R_A = R_B$.

Случай когда C' попадает на окружность ω тривиален.

Равенство $R_B = R_C$ доказывается аналогично.

Замечание. В доказательстве использовано понятие степени точки. Напомним определение этого понятия.

Определение: Пусть даны точка A и окружность ω. Пусть произвольная прямая l проходит через A и пересекает окружность в точках B и C. Тогда степенью точки A относительно окружности ω называется

- $AB \cdot AC$, если точка A снаружи окружности;
- $-AB \cdot AC$, если точка A внутри окружности;
- 0, если точка A на окружности.

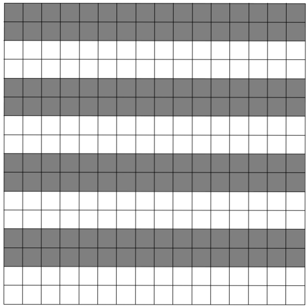
Как хорошо известно, эта величина не зависит от выбора прямой l.

Рассмотрев прямую l, проходящую через A и центр O окружности ω, получаем, что степень точки также равна $AO^2 - R_\omega^2$, что использовано в решении.

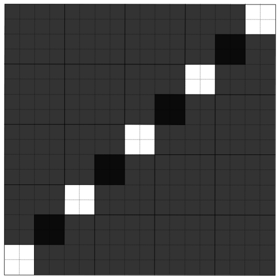
5. На клетчатой доске $n \times n$ часть клеток отмечают крестиками так, что в каждом квадрате 4×4 отмечена по крайней мере половина клеток. При каждом чётном $n > 3$ найти наименьшее возможное количество отмеченных клеток.

Ответ. $8q^2$ при $n = 4q$; $8q^2 + 4q$ при $n = 4q + 2$.

Решение. Пусть $n = 4q$. Тогда на доске можно разместить q^2 непересекающихся квадратов 4×4, и в каждом отмечено не менее 8 клеток. Схема примера приведена на картинке:



Пусть $n = 2q + 2$. Рассмотрим две пересекающиеся области, показанные на рисунке.



Каждая из областей разбивается на $q(q+1)/2$ непересекающихся квадратов. В каждом квадрате отмечено не менее 8 отмеченных клеток. При этом отмеченные клетки, попавшие в обе области, посчитаны дважды. Всего в пересечении областей $4q$ клеток, следовательно, на доске отмечено не менее

$$8q(q+1) - 4q = 8q^2 + 4q$$

клеток. Схема примера приведена на рисунке.