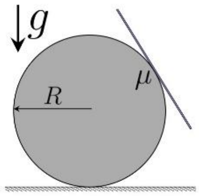
# Интернет – олимпиада СУНЦ МГУ 9 класс, 3 этап

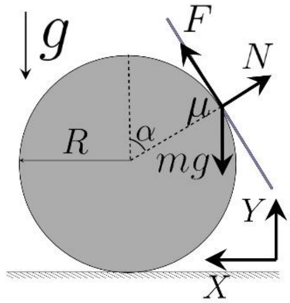
**Задача №1**

На поверхности неподвижного шара радиуса $R$ расположили однородный стержень, коэффициент трения которого о поверхность шара равен μ. Найдите длину границы области на поверхности шара, где стержень может находиться в положении равновесия. Ускорение свободного падения $g$.




**Решение**

Из теоремы о трех силах следует, что стержень касается серединой. На стержень действуют сила тяжести, сила нормальной реакции опоры и сила трения. Введем оси $Ox$ и $Oy$, направленные горизонтально и вертикально соответственно. Условия равновесия, в проекциях на оси




$$N\ \sin\alpha - F_{\text{тр}}\ \cos\alpha = 0$$

$$N\cos\alpha + F_{\text{тр}}\sin\alpha - \ mg = 0$$

В граничных точках сила трения покоя принимает максимальное значение $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Решая приведенные уравнения, получим

$$tg\alpha_{\text{гр}} = \mu.$$

Таким образом, длина границы области будет равна длине окружности, ограничивающей шаровой сегмент

$$l = 2\pi R\sin\alpha_{\text{гр}} = 2\pi R\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}.$$

**Ответ**

$$l = \frac{2\pi R\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}$$

**Задача №2**

Легкий стакан содержит воду массы $M$ при температуре $t_0$. В стакан наливают небольшой объем воды массы $m$ при температуре $t$. Затем, перемешав всю воду, из стакана выливают воду массы $m$. Процесс доливания и выливания воды повторяется. Найдите

1. Какая температура установится в стакане через длительное время?
2. Какая температура будет в стакане через $n$ операций доливания и выливания?

**Решение**

Через длительное время, т.е. большое количество операций доливания и выливания, в стакане установится температура доливаемой воды $t$.

Обозначим теплоемкость воды $c$, установившаяся температура после $n$ операций $t_n$, а после доливания $n+1$ ложки, установится температура $t_{n+1}$

$$cM(t_{n+1}-t_n) = cm(t-t_{n+1}).$$

Получим рекуррентную формулу

$$t_{n+1} = \frac{M}{M+m}t_n + \frac{m}{M+m}t.$$

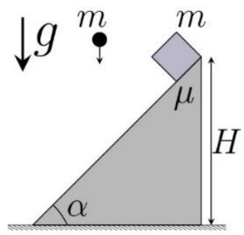
В общем случае, получим

$$t_{n+1} = \left(\frac{M}{M+m}\right)^n t_0 + \left(1-\left(\frac{M}{M+m}\right)^n\right)t.$$

**Ответ**

1. t
2. $t_n = \left(\frac{M}{M+m}\right)^{n-1} t_0 + \left(1-\left(\frac{M}{M+m}\right)^{n-1}\right)t$

**Задача №3**

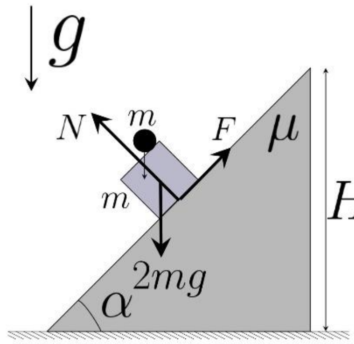



Тело массы $m$ соскальзывает с неподвижной наклонной плоскости с высоты $H$ первый раз свободно, а во второй раз на полпути сверху на это тело падает кусок пластилина массы $m$, имеющий перед ударом о брусок скорость $v$. Найдите отношение времени соскальзывания во втором случае ко времени соскальзывания в первом случае, если угол наклона плоскости α, коэффициент трения бруска о наклонную плоскость μ.

**Решение**

Ускорение тела на наклонной плоскости

$$a = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$




Тогда расстояние $S = \frac{H}{\sin\alpha}$ тело пройдет за время

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2H}{g\sin\alpha\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}$$

Тело проходит полпути $l = \frac{H}{2\sin\alpha}$ с тем же ускорением $a = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ за время

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{H}{g\sin\alpha\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}$$

и наберет скорость

$$v_1 = at_1 = \sqrt{\frac{gH(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\sin\alpha}}.$$

Запишем закон изменения импульса в проекциях вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно ей

$$0 - (-mv\cos\alpha) = (N - 2mg\cos\alpha)\Delta t,$$

$$2mu - (mv_1 + mv\sin\alpha) = \left(2mg\sin\alpha - F_{\text{тр}}\right)\Delta t,$$

где $u$ – скорость тела и пластилина вместе.

Тела во время соударения скользят по наклонной плоскости (см. ниже), следовательно

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Импульсом силы тяжести за время соударения можно пренебречь, тогда

$$u = \frac{v_1 + v\sin\alpha - \mu v\cos\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{gH(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\sin\alpha}} + v(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\right)$$

Заметим, что

$$u = \frac{v_1 + v\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \mu)}{2} > 0$$

для всех случаев, когда $\operatorname{tg}\alpha > \mu$. Следовательно, тело с пластилином скользят во время соударения.

Время, за которое соскользнут оба тела вместе находится из уравнения

$$l = ut_2 + \frac{at_2^2}{2}$$

Тогда

$$t_2 = \frac{-u + \sqrt{u^2 + 2al}}{a}$$

Ответом будет отношение

$$\frac{t_1 + t_2}{t}$$

***Комментарий:*** *Данное выражение достаточно громоздкое. В качестве ответа принимается также система уравнений, без явного ответа.*

**Ответ**

$$\frac{t_1 + t_2}{t}$$

**Задача №4**

Митя Гиперболкин решил организовать заезд двух лучших гонщиков на кольцевой трассе. Трек одного гонщика представляет собой окружность радиуса $R$, а у второго $2R$. Гоночные болиды обоих гонщиков и покрытия треков одинаковы. Первый гонщик должен проехать полный круг. Для того, чтобы гонка была справедливой, Митя решил, что второй гонщик должен проехать не полный круг, а лишь его часть. Найдите отношение «справедливой» длины трека второго гонщика к длине окружности радиуса $2R$. Под справедливой длиной понимается такая длина, что время движения гонщиков будет одинаковым, при условии, что они движутся с максимально допустимой скоростью.

**Решение**

Лучшие гонщики едут по окружности с максимально допустимой скоростью, которая определяется радиусом окружности и коэффициентом трения

$$a_{\text{ц}} = \mu g = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\mu g r}.$$

Первый гонщик едет со скоростью $v_1 = \sqrt{\mu g R}$ и проходит полный круг радиуса R за время

$$t_1 = \frac{2\pi R}{\sqrt{\mu g R}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{\mu g}}.$$

Второй гонщик едет со скоростью $v_2 = \sqrt{2\mu g R}$ и проходит часть круга радиуса 2R за время

$$t_2 = \frac{\alpha 2\pi 2R}{\sqrt{2\mu g R}} = \alpha 2\pi\sqrt{\frac{2R}{\mu g}},$$

где $\alpha$ – искомое отношение.

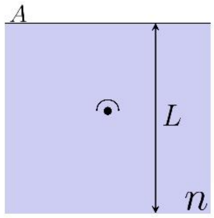
Гонка будет справедливой, если $t_1 = t_2$, тогда, приравнивая времена, получим

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Ответ**

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

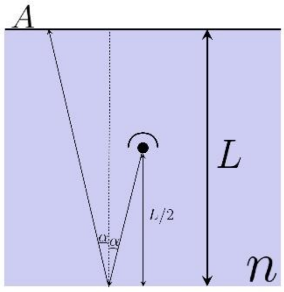
**Задача №5**




Точечный источник света находится посередине широкой стеклянной пластинки толщины $L$ с показателем преломления $n$. Показатель преломления внешней среды 1. На верхней границе пластинки расположен экран $A$. Найдите диаметр тени на экране, если источник не может светить напрямую на экран из-за полусферической маленькой ширмы. Считайте, что если свет преломляется на границе раздела сред, то отражением можно пренебречь.

**Решение**

Угол полного внутреннего отражения $\alpha_{\text{кр}}$ определяется условием




$$n \sin \alpha_{\text{кр}} = 1 \times 1,$$

или

$$\sin \alpha_{\text{кр}} = \frac{1}{n}.$$

Тогда диаметр тени получается равным

$$D = 2\left(\frac{L}{2} tg\alpha_{\text{кр}} + Ltg\alpha_{\text{кр}}\right) = 2\,\frac{3}{2} Ltg\alpha_{\text{кр}} = \frac{3L}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

**Ответ**

$$D = \frac{3L}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$