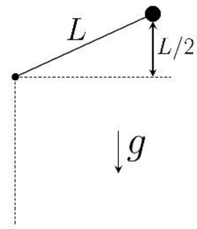
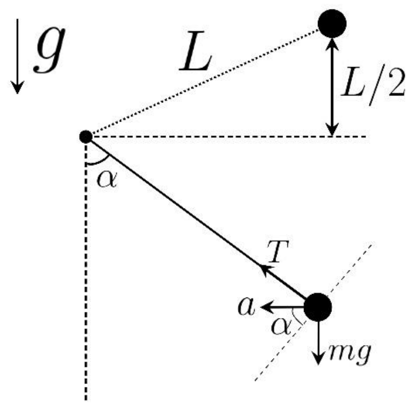
Интернет – олимпиада СУНЦ МГУ 10 класс, 3 этап

Задача №1

Маленький тяжелый шарик подвесили к гвоздю на нити длины L и подняли над горизонтом на высоту $L/2$, а затем отпустили. Найдите, на какой высоте над нижней точкой траектории полное ускорение шарика направлено горизонтально.



Решение



Пусть полное ускорение тела в некоторой точке горизонтально, тогда $tg\alpha = \frac{a_ц}{a_к}$. Запишем второй закон Ньютона на касательное направление

$$ma_к = mg\sin\alpha \;\Rightarrow\; a_к = g\sin\alpha.$$

Центростремительное ускорение равно $a_ц = \frac{v^2}{L}$, для нахождения v^2 запишем закон сохранения энергии

$$mg\frac{3}{2}L = \frac{mv^2}{2} + mgL(1-\cos\alpha) \Rightarrow v^2 = gL(1+2\cos\alpha).$$

Тогда, подставляя выражения для ускорений, получим

$$tg\alpha = \frac{g(1+2\cos\alpha)}{g\sin\alpha} = \frac{1+2\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow 2\,cos^2\,\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0$$

Решая, получим

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}-1}{6}.$$

Искомая высота

$$H = L(1 - cos\,\alpha) = \frac{7-\sqrt{13}}{6}L$$

Ответ

$$H = \frac{7-\sqrt{13}}{6}L$$

Задача №2

Однородный шар изо льда радиуса R_0 равномерно нагревают со всех сторон. Мощность источника меняется так, что радиус шара уменьшается с постоянной скоростью, а весь шар расплавился за время τ. Найдите зависимость мощности источника от времени, если плотность льда ρ, удельная теплота плавления λ.

Решение

Запишем уравнение теплового баланса

$$P(t)\Delta t = \lambda \Delta m,$$

где $\Delta m = \rho 4\pi R^2(t)\Delta R$, Δt – малое время. Закон изменения радиуса шара $R(t) = R_0 - \frac{R_0}{\tau}t$, тогда модуль изменения радиуса равен $\Delta R = \frac{R_0}{\tau}\Delta t$, подставляя все в уравнение теплового баланса, получим

$$P(t) = \frac{4\pi\lambda\rho {R_0}^3(\tau - t)^2}{\tau^3}$$

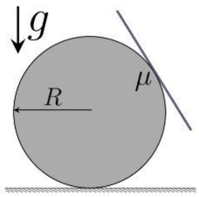
Ответ

$$P(t) = \frac{4\pi\lambda\rho {R_0}^3(\tau - t)^2}{\tau^3}$$

Комментарий: *В условии была опечатка, если учитывалось нагревание жидкости, то такое решение засчитывалось полностью.*

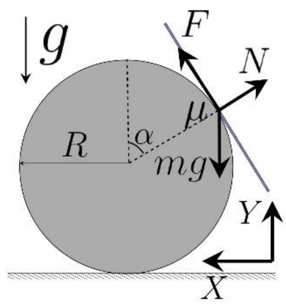
Задача №3

На поверхности неподвижного шара радиуса R расположили однородный стержень, коэффициент трения которого о поверхность шара равен μ. Найдите длину границы области на поверхности шара, где стержень может находиться в положении равновесия. Ускорение свободного падения g.



Решение

Из теоремы о трех силах следует, что стержень касается серединой. На стержень действуют сила тяжести, сила нормальной реакции опоры и сила трения. Введем оси Ox и Oy, направленные горизонтально и вертикально соответственно. Условия равновесия, в проекциях на оси



$$N\ \sin\alpha - F_{\text{тр}}\ \cos\alpha = 0$$

$$N\cos\alpha + F_{\text{тр}}\sin\alpha - \ mg = 0$$

В граничных точках сила трения покоя принимает максимальное значение $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Решая приведенные уравнения, получим

$$tg\alpha_{\text{гр}} = \mu.$$

Таким образом, длина границы области будет равна длине окружности, ограничивающей шаровой сегмент

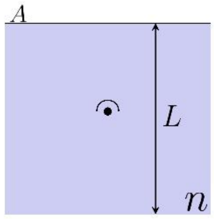
$$l = 2\pi R\sin\alpha_{\text{гр}} = 2\pi R\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}.$$

Ответ

$$l = \frac{2\pi R\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$$

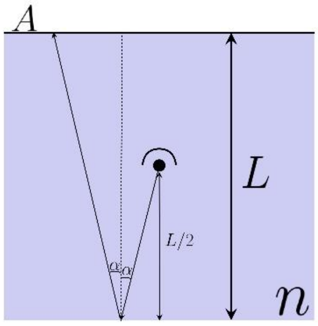
Задача №4

Точечный источник света находится посередине широкой стеклянной пластинки толщины L с показателем преломления n. Показатель преломления внешней среды 1. На верхней границе пластинки расположен экран A. Найдите диаметр тени на экране, если источник не может светить напрямую на экран из-за полусферической маленькой ширмы. Считайте, что если свет преломляется на границе раздела сред, то отражением можно пренебречь.



Решение

Угол полного внутреннего отражения $\alpha_{\text{кр}}$ определяется условием



$$n \sin \alpha_{\text{кр}} = 1 \times 1,$$

или

$$\sin \alpha_{\text{кр}} = \frac{1}{n}.$$

Тогда радиус тени получается равным

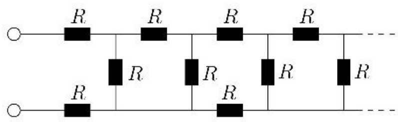
$$R = \frac{L}{2} tg\alpha_{\text{кр}} + Ltg\alpha_{\text{кр}} = \frac{3}{2} Ltg\alpha_{\text{кр}} = \frac{3L}{2\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Ответ

$$R = \frac{3L}{2\sqrt{n^2 - 1}}.$$

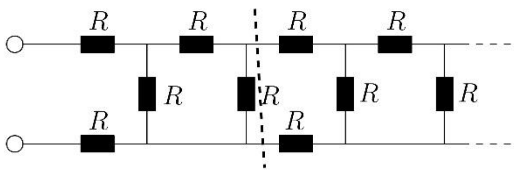
Задача №5

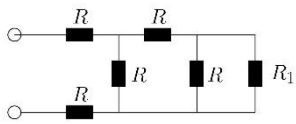
Дуня Параболкина прячет свои секреты в шкатулке, которая имеет электронный замок. Для того, чтобы открыть шкатулку, нужно вставить в цепь резистор определенного сопротивления, значение которого засекречено в подсказке: «Секретное сопротивление такое же, как общее сопротивление бесконечной цепи …», и дальше прилагается схема бесконечной цепи. В один прекрасный день Дуня забыла значение сопротивления, и ей пришлось его заново считать по подсказке. Найдите значение этого сопротивления, если сопротивление $R = 10$ Ом. Ответ выразите в Омах, округлив до десятых.



Решение

Заметим, что если разрезать схему по линии, то оставшаяся бесконечная часть имеет такое же сопротивление, как исходная. Подсоединим ее обратно, заменив на один резистор с общим сопротивлением, равным полному сопротивлению цепи. Тогда найдем полное сопротивление эквивалентной цепи





$$R_1 = 2R + \frac{R\left(R + \frac{RR_1}{R + R_1}\right)}{R + \left(R + \frac{RR_1}{R + R_1}\right)},$$

решая выписанное уравнение, получим

$$R_1 = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{3} R = 26.3\ \text{Ом}$$

Ответ

$$R_1 = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{3} R = 26.3\ \text{Ом}$$