Лекция 8

Законы изменения и сохранения энергии. Потенциальная энергия взаимодействия частиц. Вторая и третья космические скорости

Законы изменения и сохранения энергии для одной и двух частиц

Разобьём все силы, действующие на интересующую нас частицу на две группы: *консервативные и неконсервативные*. Заметим, что во вторую группу могут быть включены не только действительно неконсервативные силы, но и силы, которые являются консервативными, но по каким-либо причинам мы не хотим включать их в первую группу сил и вводить для них потенциальную энергию.

Пусть за некоторый промежуток времени частица совершила некоторое перемещение. По теореме об изменении кинетической энергии частицы имеем:

$$\Delta K \equiv K_{\text{кон}} - K_{\text{нач}} = A_{\text{конс}} + A_{\text{неконс}}\,, \qquad (1)$$

где $A_{\text{конс}}$ – работа результирующей всех действующих на частицу *консервативных* сил, а $A_{\text{неконс}}$ – работа результирующей всех *неконсервативных* сил, действующих на частицу. Работу консервативных сил над частицей можно выразить через изменение её потенциальной энергии:

$$A_{\text{конс}} = -(U_{\text{кон}} - U_{\text{нач}}), \qquad (2)$$

где $U_{\text{кон}}$ и $U_{\text{нач}}$ – потенциальные энергии частицы в результирующем потенциальном поле действующих на частицу консервативных сил в конечном и начальном положениях частицы соответственно. Подставляя (2) в (1), после небольших преобразований, получим:

$$(K_{\text{кон}} + U_{\text{кон}}) - (K_{\text{нач}} + U_{\text{нач}}) = A_{\text{неконс}}\,. \qquad (3)$$

Величину $E = K + U$ называют **полной механической или просто механической энергией частицы**. Формула (3) выражает **закон изменения механической энергии частицы**: *изменение механической энергии частицы равно сумме работ* ***всех неконсервативных сил****, действующих на частицу*.

Из (3) также получаем **закон сохранения механической энергии частицы***: механическая энергия частицы сохраняется, если работа* ***всех неконсервативных сил****, действующих на частицу, равна нулю*.

Определение. *Кинетической энергией системы частиц* называется сумма кинетических энергий частиц, входящих в систему.

Рассмотрим теперь систему из двух частиц, которые взаимодействуют как с внешними телами, так и друг с другом. В отличие от рассмотренного выше случая одной частицы, в случае двух взаимодействующих частиц наряду с внешними силами (заранее заданными во всех точках пространства и во все моменты времени) существуют силы взаимодействия между частицами (внутренние силы), которые существенным образом зависят от движения обеих частиц. С внешними силами будем поступать так же, как и в случае одной частицы, а внутренние силы будем рассматривать отдельно. Тогда закон изменения механической энергии (3) для каждой из частиц можно записать в виде:

$$\Delta K_1 + \Delta U_1 = A_{1,\text{неконс}}^{\text{внешн}} + A_1^{\text{внутр}},$$

$$\Delta K_2 + \Delta U_2 = A_{2,\text{неконс}}^{\text{внешн}} + A_2^{\text{внутр}},$$

где $A_1^{\text{внутр}}$ и $A_2^{\text{внутр}}$ – работы сил взаимодействия частиц над первой и второй частицами соответственно. После сложения двух последних уравнений получим:

$$\Delta K + \Delta U^{\text{внеш}} = A_{\text{неконс}}^{\text{внешн}} + A_1^{\text{внутр}} + A_2^{\text{внутр}}. \qquad (4)$$

Здесь $\Delta K = \Delta K_1 + \Delta K_2$ – изменение кинетической энергии системы двух частиц, $\Delta U^{\text{внеш}} = \Delta U_1 + \Delta U_2$ – изменение потенциальной энергии системы частиц во внешних потенциальных полях, $A_{\text{неконс}}^{\text{внешн}} = A_{1,\text{неконс}}^{\text{внешн}} + A_{2,\text{неконс}}^{\text{внешн}}$ – работа всех внешних неконсервативных сил над обеими частицами. Расчёт работ $A_1^{\text{внутр}}$ и $A_2^{\text{внутр}}$ по отдельности почти всегда является достаточно сложной задачей, если только в силу каких-либо очевидных причин хотя бы одна из этих работ не равна нулю или сила взаимодействия частиц не является постоянной. Дело в том, что из-за движения первой (второй) частицы сила, действующая на вторую (первую) частицу, часто зависит не только от положения последней, но и от времени. Однако, оказывается, что сумма $A_1^{\text{внутр}} + A_2^{\text{внутр}}$ во многих важных случаях может быть найдена достаточно легко.

Независимость суммы работ сил взаимодействия двух частиц от выбора системы отсчёта. Потенциальная энергия взаимодействия. Потенциальная энергия системы двух частиц

Пусть за некоторое малое время dt первая частица переместилась на $d\overrightarrow{r_1}$, а вторая частица на $d\overrightarrow{r_2}$. Тогда элементарная работа силы $\overrightarrow{F_{12}}$, действующей на первую частицу со стороны второй будет равна:

$$\delta A_1 = \overrightarrow{F_{12}} d\overrightarrow{r_1}.$$

Аналогично, элементарная работа силы $\overrightarrow{F_{21}}$, действующей на вторую частицу со стороны первой, за это же время будет равна:

$$\delta A_2 = \overrightarrow{F_{21}} d\overrightarrow{r_2}.$$

Для суммы работ сил взаимодействия с учётом III закона Ньютона ($\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}}$) получим:

$$\delta A_{\text{вз}} = \delta A_1 + \delta A_2 = \overrightarrow{F_{12}} d\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{F_{21}} d\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{F_{12}}(d\overrightarrow{r_1} - d\overrightarrow{r_2}) = \overrightarrow{F_{12}} d\overrightarrow{r_{12}}, \qquad (5)$$

где $d\overrightarrow{r_{12}} = d\overrightarrow{r_1} - d\overrightarrow{r_2}$ – перемещение первой частицы относительно второй за время dt.

Так как $\overrightarrow{F_{12}}$ и $d\overrightarrow{r_{12}}$ не меняются при переходе из одной системы отсчета в другую (не обязательно инерциальную!), то из (5) следует, что *сумма элементарных работ, совершаемых за* *одно и то же малое время силами взаимодействия двух частиц, не зависит от системы отсчета, в которой рассматривается движение частиц.* А поскольку работа на конечном перемещении равна сумме элементарных работ на составляющих его малых перемещениях, то справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Сумма работ, совершаемых силами взаимодействия двух частиц при их перемещениях в течение любого интервала времени, не зависит от системы отсчета, в которой рассматривается движение этих частиц.*

В частности, можно использовать систему отсчета S, которая поступательно движется относительно некоторой инерциальной системы отсчёта и в которой одна из частиц (назовём её первой) неподвижна. Тогда в S работа силы взаимодействия над первой частицей будет равна нулю. И остаётся в этой же системе отсчёта найти работу силы взаимодействия над второй частицей. При этом в силу неподвижности первой частицы мы получаем уже знакомую нам задачу расчёта работы некоторого заданного силового поля на некоторой траектории движения точки приложения силы. В частности, если в системе S сила взаимодействия, действующая на вторую частицу со стороны первой частицы, ***является потенциальной***, то для неё обычным образом можно ввести потенциальную энергию (только теперь по своему физическому смыслу это будет **потенциальная энергия взаимодействия двух частиц**) и выразить её работу через изменение этой потенциальной энергии. Тогда *в любой другой системе отсчета по доказанному выше утверждению сумма работ, совершаемых уже обеими силами взаимодействия двух частиц, не будет зависеть от траектории движения частиц и будет равна разности потенциальных энергий взаимодействия этих двух частиц в их начальном и конечном положениях*:

$$A_{\text{вз}} \equiv A_1^{\text{внутр}} + A_2^{\text{внутр}} = U_{\text{вз,нач}} - U_{\text{вз,кон}} = -\Delta U_{\text{вз}}. \qquad (6)$$

Разбивая силы взаимодействия частиц на потенциальные и не потенциальные и пользуясь (6), **закон изменения механической энергии системы из двух частиц** (4) можно записать в виде:

$$\Delta K + \Delta U = A_{\text{неконс}}\,. \qquad (7)$$

В (7) $U = U_1 + U_2 + U_{\text{вз}}$ – потенциальная энергия системы двух частиц, равная сумме потенциальных энергий этих частиц во внешних потенциальных полях (создаваемых телами, не входящими в рассматриваемую систему) и потенциальной энергии их взаимодействия между собой, $A_{\text{неконс}}$ – сумма работ *всех* неконсервативных сил (***как внутренних, так и внешних***) над обеими частицами системы.

Пример. Потенциальная энергия U двух частиц массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии R друг от друга на высотах h_1 и h_2 от поверхности Земли и соединенных пружиной жесткости k, имеющей в недеформированном состоянии длину L равна:

$$U = (m_1h_1 + m_2h_2)g - G\frac{m_1m_2}{R} + \frac{k(R-L)^2}{2} + C,$$

где величина константы C определяется выбором нулевых точек для потенциальных энергий. В частности, если за ноль потенциальной энергии в поле тяжести Земли принять энергию на её поверхности, за ноль потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух частиц принять их энергию в положении, когда они удалены на бесконечно большое расстояние, и за ноль потенциальной энергии упругой деформации пружины принять энергию не деформированной пружины, то $C = 0$.

Законы изменения и сохранения механической энергии для произвольной системы частиц

Проведённое выше рассмотрение системы двух частиц достаточно очевидным образом обобщается на произвольную систему N частиц, которые взаимодействуют как с внешними телами, так и друг с другом. Силы, действующие на каждую частицу, разобьем на три группы:

1) консервативные внешние (действующие на частицы системы со стороны тел, не входящих в рассматриваемую систему);

2) консервативные внутренние (действующие на одну из частиц системы со стороны других частиц, входящих в рассматриваемую систему);

3) все неконсервативные (как внутренние, так и внешние).

Заметим, что в последнюю группу можно включать не только действительно неконсервативные силы, но и силы, которые являются консервативными, но по каким-либо причинам мы не хотим вводить для них потенциальную энергию.

Пусть за некоторый промежуток времени система частиц перешла из состояния 1 в состояние 2, то есть каким-то образом изменились положения и скорости всех или некоторых частиц, входящих в систему. При этом каждая частица совершила определенное перемещение, двигаясь под действием перечисленных выше сил. По закону изменения механической энергии (3) для каждой из частиц имеем:

$$\Delta K_i + \Delta U_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij,\text{конс}}^{\text{внутр}} + A_{i,\text{неконс}} \quad (i = 1,2, \dots, N), \qquad (8)$$

где ΔU_i – изменение потенциальной энергии i-й частицы во всех внешних потенциальных полях; $A_{ij,\text{конс}}^{\text{внутр}}$ – работа результирующей силы всех консервативных сил, действующих на i-ю частицу системы со стороны j-й частицы; $A_{i,\text{неконс}}$ – сумма работ *всех* (*как внутренних, так и всех внешних*) неконсервативных сил, действующих на i-ю частицу системы. После сложения всех N уравнений (8) получим:

$$\Delta K + \Delta U^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij,\text{конс}}^{\text{внутр}} + A_{\text{неконс}}\,. \qquad (9)$$

В (9) ΔK – изменение кинетической энергии системы, $\Delta U^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{N} \Delta U_i$ – изменение потенциальной энергии системы частиц во внешних потенциальных полях, $A_{\text{неконс}} = \sum_{i=1}^{N} A_{i,\text{неконс}}$ – сумма работ *всех* (*как внутренних, так и всех внешних*) неконсервативных сил, действующих на все частицы системы. Работы внутренних консервативных сил можно сгруппировать попарно и выразить через изменения потенциальных энергий взаимодействия частиц во всех различных парах частиц системы:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij,\text{конс}}^{\text{внутр}} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \left(A_{ij,\text{конс}}^{\text{внутр}} + A_{ji,\text{конс}}^{\text{внутр}} \right) = -\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \Delta U_{ij\,\text{взаим}}, \qquad (10)$$

где $\Delta U_{ij\,\text{взаим}}$ – изменение потенциальной энергии взаимодействия i-й и j-й частиц, а суммирование проводится по всем различным парам частиц (каждая пара учитывается один раз).

Величину

$$U = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} U_{ij\,\text{взаим}} + \sum_{i=1}^{N} U_i \qquad (11)$$

называют **потенциальной энергией системы частиц.** Она равна сумме потенциальных энергий взаимодействия частиц во всех различных парах частиц системы и потенциальных энергий всех частиц системы во внешних потенциальных полях (создаваемых телами, не входящими в рассматриваемую систему). Величину $E \equiv K + U$ называют **полной механической** (или просто механической) **энергией системы**. Подставляя (10), (11) в (9) окончательно получим **закон изменения механической энергии системы частиц**:

$$E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}} = A_{\text{неконс}}\,, \qquad (12)$$

т.е. *изменение механической энергии системы равно сумме работ* ***всех (как внутренних, так и внешних)*** *неконсервативных сил, действующих на частицы системы*.

Из (12) также имеем **закон сохранения механической энергии системы частиц**: *механическая энергия системы частиц сохраняется, если работа* ***всех (как внутренних, так и внешних)*** *неконсервативных сил, действующих на частицы системы равна нулю*.

Таким образом, в отличие от импульса системы частиц, который сохраняется в любой замкнутой системе, *для сохранения энергии в замкнутой системе* ***дополнительно*** *необходимо, чтобы работа всех внутренних неконсервативных сил в этой системе равнялась нулю*.

Замечания.

1. Мы получили законы сохранения и изменения механической энергии из теоремы о

кинетической энергии, которую мы доказывали на основе второго закона Ньютона. Поэтому все наши выводы справедливы только в инерциальных системах отсчета. При работе в неинерциальных системах отсчета необходимо дополнительно учитывать работу сил инерции.

2. Взаимодействия, при которых сохраняется механическая энергия, часто называют **упругими**.

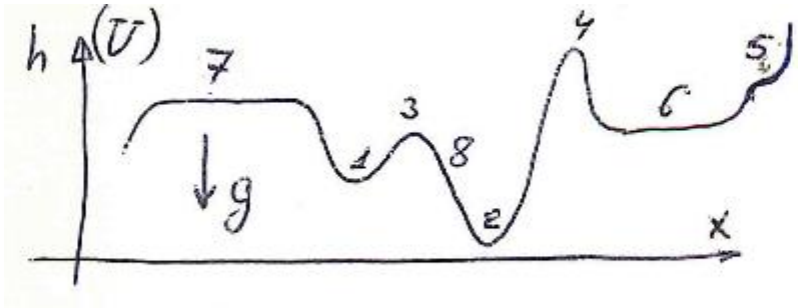
3. Закон сохранения механической энергии является частным случаем фундаментального закона природы – закона сохранения полной энергии в замкнутой системе. Как оказывается, последний связан с однородностью времени: все явления в замкнутой системе при одинаковых начальных условиях будут дальше протекать совершенно одинаково, независимо от того, в какой момент времени эти начальные условия созданы.

Виды равновесия. Энергетические условия устойчивости равновесия

Из II закона Ньютона следует, что в инерциальной системе отсчета частица находится в равновесии (покоится), если в некоторый момент времени она покоилась, и векторная сумма действующих на неё сил равна нулю.

Равновесие бывает устойчивым, неустойчивым и безразличным.

Определение. Положение равновесия частицы называют **устойчивым**, если при любых достаточно малых возможных перемещениях частицы из положения равновесия действующие на неё силы стремятся вернуть её обратно, и **неустойчивым**, если силы, возникающие при сколь угодно малом отклонении хотя бы в некотором направлении, уводят её дальше от положения равновесия. Если же при любых достаточно малых возможных смещениях действующие на частицу силы по-прежнему уравновешиваются, то положение равновесия называют **безразличным**.



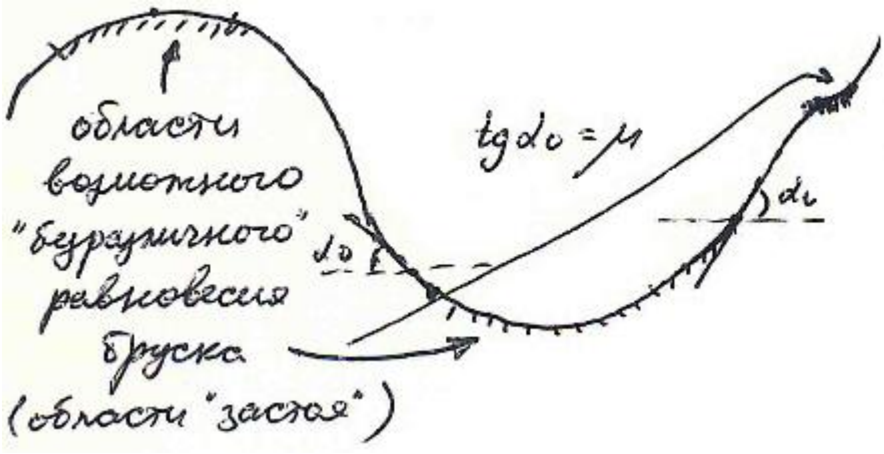
Наглядное представление о связи видов равновесия частицы и особенностей в зависимости потенциальной энергии частицы от её положения можно получить, рассматривая поведение частицы на кривой гладкой поверхности при наличии силы тяжести. На рисунке изображен профиль некоторой поверхности и различные положения частицы на ней. Чем выше находится частица, тем больше её потенциальная энергия $U = mgh$.

Точки 1 и 2 соответствуют локальным минимумам потенциальной энергии и одновременно устойчивым положениям равновесия. Точки 3 и 4 соответствуют локальным максимумам потенциальной энергии и одновременно неустойчивым положениям равновесия, так как при малейшем смещении частицы в ту или иную сторону, она начнёт соскальзывать в яму к положению устойчивого равновесия. Положение 5, в котором зависимость U(x) имеет точку перегиба, также соответствует неустойчивому положению равновесия. Точки 6 и 7 соответствуют постоянству потенциальной энергии, в них частица находится в безразличном равновесии. Наконец, положение 8 соответствует неравновесному состоянию ($\vec{F} \neq 0$).

Все закономерности, выясненные на этом простом примере, остаются справедливыми и в более общем случае. Пусть все силы, действующие на частицу, являются консервативными. Ранее было доказано, что потенциальная сила всегда направлена в сторону убывания потенциальной энергии. Поэтому, если потенциальная энергия в данном положении частицы меньше, чем в любом другом возможном близком положении, то при любом малом возможном отклонении частицы всегда будет возникать сила, направленная к её исходному состоянию, т.е. *состояние равновесия частицы, находящейся в поле консервативных сил, соответствующее локальному минимуму потенциальной энергии всегда является устойчивым*. С другой стороны, по определению устойчивого равновесия при любом малом возможном отклонении от него возникает сила, стремящаяся вернуть частицу в исходное состояние. Но потенциальная сила всегда направлена в сторону убывания потенциальной энергии. Значит, в состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия частицы меньше, чем в любом другом возможном близком состоянии, т.е. *состоянию устойчивого равновесия частицы всегда соответствует минимум её потенциальной энергии.*

Таким образом, ***некоторое состояние равновесия частицы, на которую действуют только консервативные силы, является состоянием устойчивого равновесия тогда и только тогда, когда потенциальная энергия частицы в этом состоянии имеет локальный минимум***.

Можно доказать, что данное утверждение справедливо и для консервативной *системы частиц*, т.е. системы частиц, на которые не действуют не потенциальные силы. При этом **положение равновесия *системы частиц* называют устойчивым**, если при любых малых возможных перемещениях одной или нескольких частиц системы из положения равновесия действующие на частицы системы силы стремятся вернуть всю систему в её исходное состояние.



Наш вывод остаётся справедливым и при наличии неконсервативных сил, равных нулю при отсутствии движения (например, сил сопротивления жидкостей и газов). Но *при наличии сил сухого трения минимальность потенциальной энергии уже не является ни достаточным, ни необходимым условием* ***устойчивости*** *равновесия*. В этом случае часто возникают области застоя (области ***безразличного*** равновесия системы). Примером может служить равновесие бруска, лежащего на шероховатой поверхности произвольного профиля (см. рисунок) или наклонной плоскости.

Вторая и третья космические скорости

Определение. Минимальная скорость, которую нужно сообщить телу вблизи поверхности планеты для того, чтобы оно:

а) преодолело гравитационное притяжение планеты, называется ***второй космической скоростью*** для этой планеты;

б) смогло покинуть пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца, называется ***третьей космической скоростью*** для этой планеты.

Найдем вторую космическую скорость v_{II} для Земли, пользуясь законом сохранения энергии. Кинетическая энергия тела при запуске $K_1 = \frac{m{v_{II}}^2}{2}$, потенциальная энергия вблизи поверхности Земли (при выборе «нулевой точки» на бесконечности) $U_1 = -G\frac{mM}{R} \equiv -mgR$. В конечном состоянии, когда тело достаточно далеко удалилось от Земли, его потенциальная энергия в поле тяготения Земли равна нулю. Поэтому по закону сохранения энергии имеем:

$$\frac{m{v_{II}}^2}{2} - mgR = \frac{m{v_K}^2}{2}. \qquad (13)$$

Из (13), очевидно, что минимальная начальная скорость, необходимая для преодоления гравитационного притяжения Земли, соответствует ситуации, когда на большом расстоянии от Земли скорость тела v_K обращается в ноль. Поэтому

$$v_{II} = \sqrt{2gR} \approx 11{,}2\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Заметим, что при сообщении ракете второй космической скорости она удалится от Земли на расстояние много большее радиуса Земли независимо от того, в каком направлении сообщена скорость.

Строго говоря, уравнение (13) является приближенным, т.к. при его записи мы пренебрегли изменением потенциальной энергии тела в гравитационном поле Солнца в процессе его отлёта от Земли по сравнению с изменением его потенциальной энергии в гравитационном поле Земли. Это можно сделать, т.к. потенциальная энергия гравитационного взаимодействия находящегося на поверхности Земли тела с Солнцем всего примерно в 15 раз больше, чем с

Землей, а расстояние от Земли до Солнца в 20 тысяч раз больше радиуса Земли. Поэтому тело может удалиться от Земли на расстояние много большее радиуса Земли, но при этом крайне не значительно изменить своё расстояние до Солнца, а значит и изменение его потенциальной энергии в гравитационном поле Солнца будет много меньше изменения его потенциальной энергии взаимодействия с Землей и им можно пренебречь.

Найдем теперь третью космическую скорость. Забудем на время о земном тяготении и найдем минимальную скорость v_1, которую надо сообщить телу, находящемуся от Солнца на расстоянии r, равном радиусу земной орбиты, чтобы оно смогло преодолеть притяжение Солнца. Из закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{m{v_1}^2}{2} - G\frac{mM_c}{r} = 0,$$

где M_c – масса Солнца. Легко видеть, что v_1 в $\sqrt{2}$ раз больше скорости Земли на круговой орбите движения вокруг Солнца.

$$v = \sqrt{\frac{GM_c}{r}} = 29{,}8\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Последнее равенство следует из II закона Ньютона для движения Земли по круговой орбите:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM_c}{r^2}.$$

Итак

$$v_1 = \sqrt{2}v \approx 42{,}1\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Если мы используем орбитальное движение Земли и запустим тело в ту же сторону, куда движется Земля, то телу достаточно будет сообщить добавочную скорость:

$$\Delta v = \left(\sqrt{2} - 1\right)v \approx 12{,}3\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Теперь можно найти и саму третью космическую скорость. Для этого надо учесть, что скорость Δv относительно Земли тело должно иметь после того, как оно преодолеет притяжение Земли, т.е. в (13) следует положить $v_K = \Delta v = \left(\sqrt{2} - 1\right)v$:

$$\frac{m{v_{III}}^2}{2} - mgR = \frac{m\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 v^2}{2}. \qquad (14)$$

Из (14) окончательно получаем

$${v_{III}}^2 = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 v^2 + 2gR \equiv \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 v^2 + {v_{II}}^2.$$

Следовательно, $v_{III} \approx 16{,}7\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$.