

Задача 1. Гаврила решил взвесить учебник по математике, однако у него в распоряжении были только гири массой 200 г, легкая линейка, на концах которой деления стерлись, карандаш и невесо- мые нитки. Гаврила подвесил к одному концу линейки учебник, а к другому — гирю, и уравновесил линейку на карандаше. Далее он прикрепил вторую гирю вместе с первой и для восстановления рав- новесия ему пришлось сдвинуть карандаш на 3 см. Когда к первым двум гирям была прикреплена третья, а карандаш передвинут еще на 2 см, опять возникло равновесие. Найдите массу учебника.

Решение. Пусть M — масса учебника, m — масса гири, x , y — величины первого и второго сдвигов линейки. Условия равновесия рычага для всех трех описанных случаев дают уравнения:

$$\begin{aligned} Ml_1 &= ml_2 \\ M(l_1 + x) &= 2m(l_2 - x) \\ M(l_1 + x + y) &= 3m(l_2 - x - y) \end{aligned}$$

Вычитая из второго уравнение первое, умноженное на 2, а из третьего — первое, умноженное на 3, получаем:

$$\begin{aligned} Mx - 2Ml_1 &= -2mx \\ M(x + y) - 2Ml_1 &= -3m(x + y) \end{aligned}$$

Откуда следует

$$M = \frac{3y - x}{x - y}m = 600 \text{ г}$$

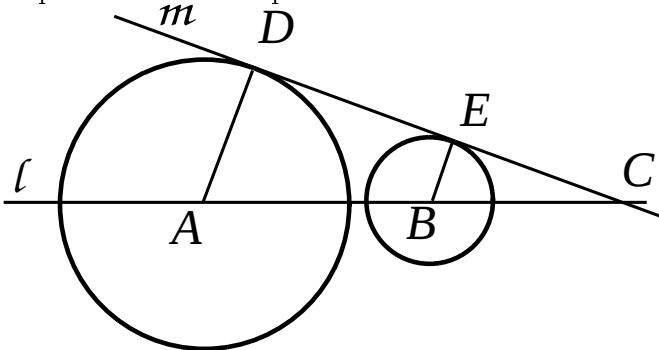
Ответ: 600 г.

Задача 2. Точки A и B находятся на прямой l , причем $AB = L$. В начальный момент времени в точке A возникает окружность, радиус в начале равен нулю и со временем растет от нуля со скоростью a , а центр неподвижен. В тот момент, когда радиус этой окружности равен R ($R < L$), в точке B возникает окружность, радиус которой растет от нуля с той же скоростью, а центр неподвижен. Указанные окружности имеют общую касательную m , причем точки A и B лежат по одну сторону от нее. Определите скорость движения точки пересечения прямых l и m .

Решение. Из подобия прямоугольных треугольников ADC и BEC (см. рис.), образованных отрезками касательной, прямой l и радиусами AD и BE , проведенными в точки касания в момент времени T получим

$$\frac{aT}{aT - R} = \frac{L + x}{x},$$

где через x обозначено расстояние BC .



Из указанного уравнения найдем $x = (aT - L)L/R$. Отсюда скорость движения точки C пересечения прямых есть aL/R

Отметим, что данная картина моделирует распространение возмущений от точечного источника, движущегося в среде со сверхзвуковой скоростью.

Ответ: aL/R .

Задача 3. В фонтане установлен насос, который засасывает воду в короткую вертикальную трубу и выбрасывает из нее вверх вертикальную струю. Во сколько раз нужно увеличить мощность насоса, чтобы увеличить высоту струи в 4 раза? Ответ обоснуйте (потери на трение отсутствуют, КПД насоса от мощности не зависит).

Решение. Так как потери на трение несущественны, высота подъема струи h пропорциональна v^2 , где v — скорость вылета жидкости из трубы: $h \sim v^2$.

Одновременно с увеличением скорости в такое же число раз увеличится расход жидкости (количество жидкости, выбрасываемой в единицу времени): $Q \sim v$

Мощность насоса P пропорциональна производству кинетической энергии, то есть произведению расхода на квадрат скорости. Таким образом,

$$P \sim Qv^2 \sim v^3 \sim h^{3/2},$$

значит мощность необходимо увеличить в 8 раз.

Ответ: в 8 раз.