

**Задача 1.** Гаврила решил взвесить учебник по математике, однако у него в распоряжении были только гири массой 200 г, легкая линейка, на концах которой деления стерлись, карандаш и невесомые нитки. Гаврила подвесил к одному концу линейки учебник, а к другому — гирю, и уравновесил линейку на карандаше. Далее он прикрепил вторую гирю вместе с первой и для восстановления равновесия ему пришлось сдвинуть карандаш на 3 см. Когда к первым двум гирям была прикреплена третья, а карандаш передвинут еще на 2 см, опять возникло равновесие. Найдите массу учебника.

**Решение.** Пусть  $M$  — масса учебника,  $m$  — масса гири,  $x$ ,  $y$  — величины первого и второго сдвигов линейки. Условия равновесия рычага для всех трех описанных случаев дают уравнения:

$$\begin{aligned} Ml_1 &= ml_2 \\ M(l_1 + x) &= 2m(l_2 - x) \\ M(l_1 + x + y) &= 3m(l_2 - x - y) \end{aligned}$$

Вычитая из второго уравнение первое, умноженное на 2, а из третьего — первое, умноженное на 3, получаем:

$$\begin{aligned} Mx - 2Ml_1 &= -2mx \\ M(x + y) - 2Ml_1 &= -3m(x + y) \end{aligned}$$

Откуда следует

$$M = \frac{3y - x}{x - y}m = 600 \text{ г}$$

**Ответ:** 600 г.

**Задача 2.** В пустую большую теплоизолированную бочку налили ведро холодной воды с температурой  $20^\circ\text{C}$ , после чего начали вливать такие же по объему ведра с кипятком температурой  $100^\circ\text{C}$ . После каждого долива воду тщательно перемешивали. Какое по счету ведро горячей воды первым изменит температуру смеси меньше, чем на  $1^\circ\text{C}$ ?

**Решение.** После добавления  $n$ -го ведра горячей воды в бочке будет температура  $t_n$ , которая определяется из уравнения теплового баланса:

$$t_c + nt_h = (n + 1)t_n, \Leftrightarrow t_n = \frac{t_c + nt_h}{n + 1},$$

где  $t_c$ ,  $t_h$  — температуры холодной и горячей воды.

Увеличение температуры смеси, вызванное  $n$ -м ведром горячей воды:

$$\Delta_n = t_n - t_{n-1} = \frac{t_h - t_c}{n(n + 1)}.$$

По условию требуется  $\Delta_n < 1^\circ\text{C}$ , что означает  $n(n + 1) > 80$ . Так как  $n$  — натуральное число  $n \geq 9$ , то есть 9-е ведро первым изменит температуру меньше чем на 1 градус.

**Ответ:** 9-е ведро.

**Задача 3.** В фонтане установлен насос, который засасывает воду в короткую вертикальную трубу и выбрасывает из нее вверх вертикальную струю. Достаточно ли увеличить мощность насоса в 5 раз, чтобы увеличить высоту струи в 3 раза? Ответ обоснуйте (потери на трение отсутствуют, КПД насоса от мощности не зависит).

**Решение.** Так как потери на трение несущественны, высота подъема  $h$  струи пропорциональна  $v^2$ , где  $v$  — скорость вылета жидкости из трубы:  $h \sim v^2$ .

Одновременно с увеличением скорости в такое же число раз увеличится расход жидкости (количество жидкости, выбрасываемой в единицу времени):  $Q \sim v$

Мощность насоса  $P$  пропорциональна произведению кинетической энергии, то есть произведению расхода на квадрат скорости. Таким образом,

$$P \sim Qv^2 \sim v^3 \sim h^{3/2},$$

При увеличении мощности в 5 раз высота увеличится в  $5^{2/3}$  раз. Так как

$$25 = 5^2 < 27 = 3^3,$$

полученное увеличение высоты меньше требуемого.

**Ответ:** недостаточно.