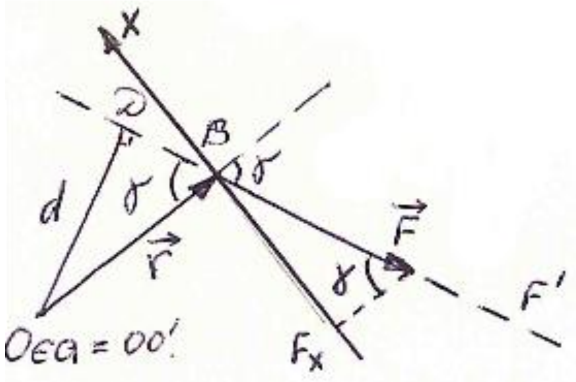
Лекция 9

Введение в кинематику, динамику и статику абсолютно твердого тела

Момент силы и момент импульса частицы относительно оси

Рассмотрим произвольную прямую a. Пусть на частицу, находящуюся в некоторой точке B, действует сила $\vec{F}$, линия действия которой BF' перпендикулярна прямой a. Проведём через прямую BF' плоскость $\delta \perp a$ (плоскость рисунка – это и есть плоскость δ). Пусть она пересечет прямую a в точке O. Тогда **плечом силы $\vec{F}$ относительно прямой a** называется кратчайшее расстояние d от точки $O \in a$ до линии действия силы $\vec{F}$: $d = |OD|$, где D – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы $\vec{F}$.



Определение. Пусть сила $\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel$, где $\vec{F}_\perp$ – составляющая силы $\vec{F}$, перпендикулярная оси OO', а $\vec{F}_\parallel$ – составляющая силы $\vec{F}$, параллельная оси OO'. Тогда **моментом силы $\vec{F}$ относительно оси** OO' называется скалярная величина, модуль которой равен произведению модуля составляющей $\vec{F}_\perp$ на её плечо d:

$$|M| = F_\perp d = F_\perp |OB| \, sin(\gamma) = F_\perp r \, sin(\gamma) = \, |F_x| r, \qquad (1)$$

где точка B – точка приложения силы $\vec{F}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OO'}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$, а ось X проходит через точку B перпендикулярно вектору $\vec{r}$ и оси OO'.

При этом моменту силы, которая вращала бы жесткий стержень OB (если бы такой был) против часовой стрелки относительно оси OO', принято приписывать положительный знак, а моменту силы, которая вращала бы стержень OB по часовой стрелке (как это имеет место на рисунке) приписывают отрицательный знак. Поэтому при выбранном на рисунке положительном направлении оси X получим, что

$$M = F_x r. \qquad (1a)$$

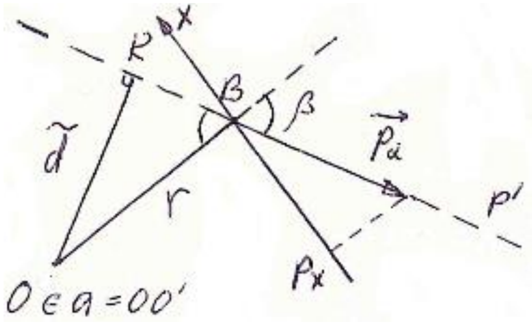
Пусть на частицу, находящуюся в точке B, действует две силы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$. Причем $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$. Тогда для момента M_F силы $\vec{F}$ относительно оси OO' имеем:

$$M_F = rF_x = r(F_{1x} + F_{2x}) = rF_{1x} + rF_{2x} = M_{F_1} + M_{F_2}, \qquad (2)$$

т.е. *момент результирующей сил, действующих на частицу, равен сумме моментов этих сил*.

Точно также как мы определили момент силы относительно оси, вводится и **момент импульса частицы относительно оси**.

Определение. Пусть некоторая частица находится в точке B и имеет импульс $\vec{p} = \vec{p}_\alpha + \vec{p}_\parallel$, где $\vec{p}_\alpha$ – составляющая импульса, перпендикулярная оси OO', а $\vec{p}_\parallel$ – составляющая импульса, параллельная оси OO'. Проведем через точку B прямую $BP' \parallel \vec{p}_\alpha$. Тогда:

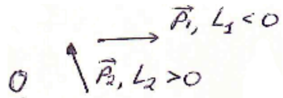


1) **плечом импульса $\vec{p}$ относительно оси OO'** называется расстояние $\tilde{d}$ между прямыми OO' и BP': $\tilde{d} = OK$, где K – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую BP'.

2) **моментом импульса частицы относительно оси OO'** называется величина, модуль которой равен произведению модуля составляющей импульса, перпендикулярной оси OO', на плечо импульса $\tilde{d}$:

$$|L| = p_\alpha \tilde{d} = p_\alpha r \sin(\beta) \qquad (3)$$

При этом моменту импульса приписывается знак по правилу, полностью аналогичному правилу знаков для момента силы (см. маленький рисунок).

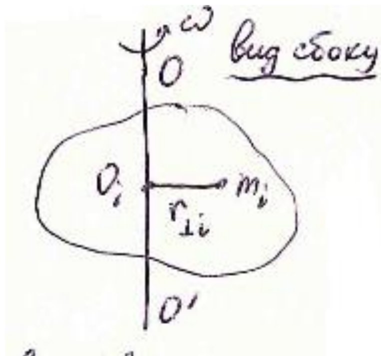


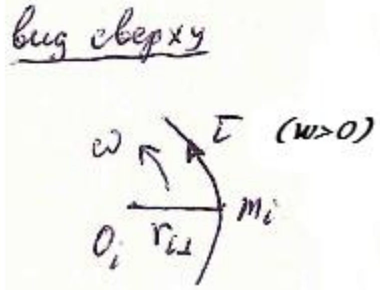
Поэтому выбирая ось X по тому же правилу, что и в случае расчёта момента силы (см. большой рисунок), получим:

$$L = r p_x. \qquad (3а)$$

Замечание. В силу данных выше определений составляющие сил и импульсов, параллельные оси OO', вклада в соответствующие моменты, рассчитываемые относительно этой оси, не дают. ***Поэтому на рисунках их можно не изображать и все силы и точки их приложения ортогонально проецировать на любую плоскость перпендикулярную оси OO'.*** В дальнейшем на рисунках такое проецирование будет подразумеваться.

Уравнение вращательного движения абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси





Рассмотрим вращение абсолютно твердого тела относительно неподвижной в инерциальной системе отсчета оси OO'. В этом случае все частицы m_i $(i = 1,2,\ldots,N)$ тела вращаются по окружностям различных радиусов $r_{\perp i}$ с одинаковой угловой скоростью ω ($r_{\perp i}$ – расстояние от i-й частицы до оси OO'). Будем считать, что $\omega > 0$, если вращение происходит против часовой стрелки, и $\omega < 0$, если вращение происходит по часовой стрелке (с точки зрения наблюдателя, смотрящего вдоль оси OO'). Тогда для любой частицы m_i момент импульса относительно оси OO' равен:

$$L_i = r_{\perp i} m_i v_{\tau i} = r_{\perp i}^2 m_i \omega \ \text{(так как } v_{\tau i} = r_{\perp i}\omega\text{)}. \qquad (4)$$

Моментом импульса L твердого тела *называют сумму моментов импульсов всех составляющих его частиц*:

$$L \equiv \sum_{i=1}^{N} L_i = \sum_{i=1}^{N} r_{\perp i}^2 \, m_i \omega = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i r_{\perp i}^2 = I_0 \omega, \qquad (5)$$

где величину $I_0 \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i r_{\perp i}^2$ называют **моментом инерции абсолютно твердого тела относительно оси OO'**. Так как в отсутствии деформаций I_0 не зависит от времени, то из (5) получаем:

$$\frac{dL}{dt} = I_0 \frac{d\omega}{dt}. \qquad (6)$$

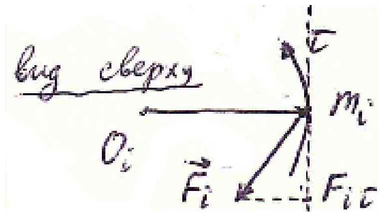
С другой стороны, из определения L имеем:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{dL_i}{dt}, \qquad (7)$$

а из (4):

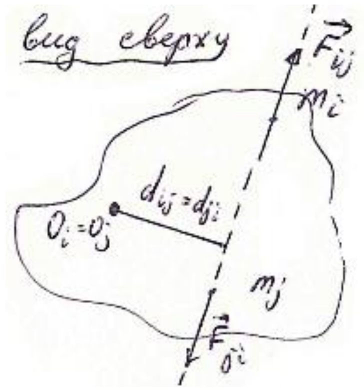
$$\frac{dL_i}{dt} = r_{\perp i} m_i \frac{dv_{\tau i}}{dt} = r_{\perp i} m_i a_{\tau i} = (\text{по } II \text{ закону Ньютона}) = r_{\perp i} F_{\tau i} = M_i, \qquad (8)$$

где $\vec{F}_i$ – результирующая всех сил, действующих на частицу m_i, а M_i – момент силы $\vec{F}_i$ относительно оси OO'. С другой стороны, $\vec{F}_i = \vec{F}_{i,\text{внутр}} + \vec{F}_{i,\text{внешн}}$, где $\vec{F}_{i,\text{внутр}}$ – результирующая сил, действующих на частицу m_i со стороны всех остальных частиц тела, а $\vec{F}_{i,\text{внешн}}$ – результирующая всех внешних сил, действующих на частицу m_i. В силу (2):



$$M_i = M_{i,\text{внутр}} + M_{i,\text{внешн}}, \qquad (9)$$

где $M_{i,\text{внутр}}$ и $M_{i,\text{внешн}}$ – соответственно моменты внутренних и внешних сил, действующих на частицу m_i. Подставляя (8) и (9) в (7), получим:



$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_i = \sum_{i=1}^{N} M_{i,\text{внутр}} + \sum_{i=1}^{N} M_{i,\text{внешн}}. \qquad (10)$$

Но $\sum_{i=1}^{N} M_{i,\text{внутр}} = 0$, так как в этой сумме наряду с моментом силы $\vec{F}_{ij}$ (действующей на частицу m_i со стороны частицы m_j) обязательно присутствует момент силы $\vec{F}_{ji}$, причем в силу III закона Ньютона $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ и линии их действия совпадают (т.е. плечи этих сил равны), и, следовательно, их моменты равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому из (6) и (10) имеем:

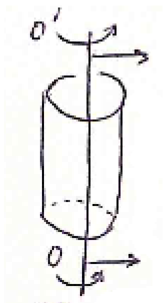
$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = \frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_{i,\text{внешн}} = M_0,$$

где M_0 – сумма моментов относительно оси OO' всех внешних сил, действующих на рассматриваемое абсолютно твердое тело. Полученное уравнение называют **уравнением вращательного движения абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси OO'.**

Кинематика плоскопараллельного движения абсолютно твердого тела.

Определение. **Плоскопараллельным движением** называется такое движение абсолютно твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.

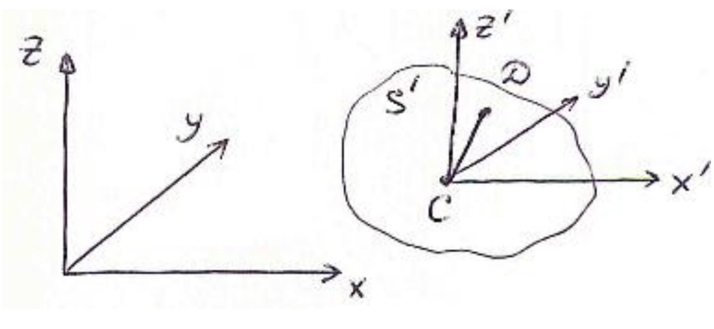
Напомним, что *поступательным* называется движение тела, при котором все его точки движутся одинаково. Отсюда ясно, что поступательное движение является плоскопараллельным тогда и только тогда, когда траектория хотя бы одной его точки является плоской, т.е. лежит в одной плоскости.



Другим частным случаем плоскопараллельного движения является *вращательное движение тела относительно неподвижной оси*, так как при этом все точки тела описывают окружности в параллельных плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

Очевидно, что если мы начнем поступательно перемещать ось вращения вместе с телом в направлении перпендикулярном оси его вращения, то движение тела останется плоскопараллельным, так как все его точки будут по-прежнему перемещаться в параллельных плоскостях, перпендикулярных оси вращения OO'. Справедливо и обратное утверждение.

Утверждение 1. Любое движение плоскопараллельное по отношению к плоскости α можно представить как наложение двух движений: вращательного вокруг некоторой оси перпендикулярной плоскости α и поступательного движения этой оси вместе с телом в направлении параллельном плоскости α (т.е. в направлении перпендикулярном оси вращения).



Доказательство. Пусть тело T движется плоскопараллельно по отношению к плоскости α, оси X и Y неподвижной (инерциальной) системы отсчета лежат в плоскости α, а ось Z – перпендикулярна ей. Тогда для любой точки тела D выполнено условие: $Z_D = const$. Это справедливо и для центра масс тела C: $Z_c = const$, т.е. скорость центра масс тела $\overrightarrow{v_c} \parallel \alpha$. Перейдем в систему отсчета S', движущуюся поступательно со скоростью $\overrightarrow{v_c}$. Начало отсчета её системы координат $X'Y'Z'$ поместим в центр масс тела, а оси X', Y' и Z' направим параллельно осям X, Y и Z соответственно. Так как для любой точки D абсолютно твердого тела расстояние CD постоянно, и так как, кроме того, $Z'_D = Z_D - Z_c = const$, то

$$X'^2_D + Y'^2_D = const.$$

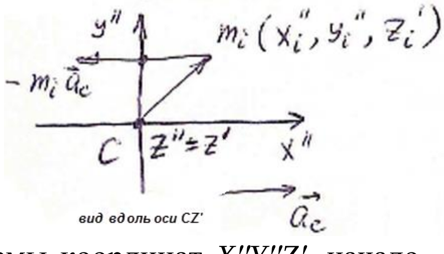
Таким образом, любая точка тела D в системе отсчета S' может двигаться только по окружности вокруг оси CZ' в перпендикулярной ей плоскости. То есть в системе S' тело совершает вращательное движение вокруг оси $CZ' \perp \alpha$. Напомним, что ось CZ' движется поступательно в направлении параллельном плоскости α со скоростью $\overrightarrow{v_c}$. Утверждение 1 доказано. Заметим, что в данном доказательстве вместо точки С можно было взять любую точку тела T, но для дальнейшего нам было удобно выбрать именно центр масс, который, вообще говоря, может и не принадлежать телу T.

Динамика плоскопараллельного движения абсолютно твердого тела

Рассмотрим теперь динамику плоскопараллельного движения. Согласно уравнению движения центра масс $m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \overrightarrow{F_0}$, где m – масса тела T, а $\overrightarrow{F_0} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i,\text{внешн}}$ – сумма всех внешних сил, действующих на частицы тела T. В системе отсчета S' ось CZ' неподвижна, и можно воспользоваться полученным ранее уравнением вращательного движения абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси. Но, т.к. система отсчета S' может быть не инерциальной (если $\overrightarrow{F_0} \neq 0$), то кроме моментов «обычных» внешних сил $\vec{F}_{i,\text{внешн}}$ в этом случае необходимо учесть также моменты поступательных сил инерции, действующих на все частицы тела: $\vec{F}_{i,\text{ин}} = -m_i\overrightarrow{a_c}$ $(i = 1,2,\dots,N)$. В результате получим:

$$I_c\frac{d\omega}{dt} = M_c + \sum_{i=1}^{N} M_{i,\text{инерц}}\,,$$

где I_c – момент инерции тела относительно оси CZ', проходящей через центр масс (так называемый **центральный момент инерции**), M_c – сумма моментов всех «обычных» внешних сил относительно той же оси.



При плоскопараллельном движении вектор ускорения всех частиц тела, и, следовательно, вектор ускорения его центра масс $\overrightarrow{a_c}$ параллелен плоскости α. Пусть в данный момент времени его направление совпадает с направлением оси X'' системы координат $X''Y''Z'$, начало отсчета которой находится в точке C. Тогда (см. рисунок) $M_{i,\text{инерц}} = m_i\,|\overrightarrow{a_c}|y_i''$ и

$$\sum_{i=1}^{N} M_{i,\text{инерц}} = |\overrightarrow{a_c}|\sum_{i=1}^{N} m_i\,y_i'' = (\text{по определению центра масс}) = my_c''|\overrightarrow{a_c}| = 0,$$

т.к. начало отсчёта системы координат $X''Y''Z'$ находится в центре масс тела.

Таким образом, ***уравнение вращательного движения абсолютно твердого тела***

относительно оси, проходящей через центр масс*, будет иметь абсолютно такой же вид, как и в случае вращения относительно неподвижной оси*:

$$I_c \frac{d\omega}{dt} = M_c.$$

Причем вид этого уравнения никак не зависит от того, движется центр масс тела равномерно или ускоренно!

Заметим, что уравнение движения центра масс и уравнение вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс, полностью описывает динамику любого плоскопараллельного движения абсолютно твердого тела (см. утверждение 1 и его доказательство).

Равнодействующая системы сил. Центр тяжести

Определение. **Равнодействующей системы сил** $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_N}$ называется сила $\overrightarrow{F_p}$, действие которой эквивалентно действию данной системы сил.

Если все рассматриваемые силы приложены к одной частице, то согласно II закону Ньютона, их действие эквивалентно действию одной силы $\overrightarrow{F_p} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i}$, приложенной к той же частице. И, следовательно, эта сила в данном случае и является равнодействующей.

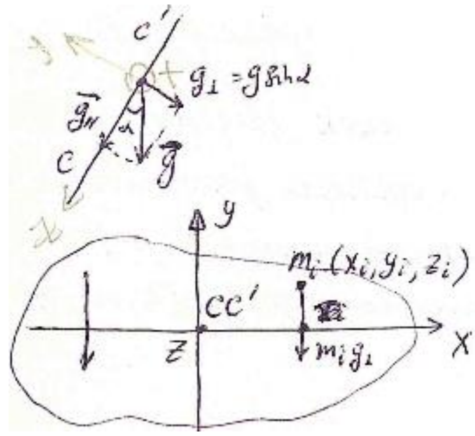
Далеко не всегда система сил имеет равнодействующую. В частности, если тело нельзя считать абсолютно твердым (т.е. необходимо учитывать его деформацию), то действие нескольких сил, приложенных к различным частям тела, не может быть эквивалентно действию одной силы. Пример приведен на рисунке:

Пусть теперь силы приложены к различным частицам тела, которое в условиях данной задачи можно считать абсолютно твердым. Как мы знаем, плоскопараллельное движение такого тела полностью определяется уравнением движения центра масс и уравнением вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс. Поэтому равнодействующая сил $\overrightarrow{F_p}$, приложенных к абсолютно твердому телу в этом случае должна удовлетворять следующим необходимым условиям:

$$\overrightarrow{F_p} = \vec{F} \equiv \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i}, \qquad M_p = M \equiv \sum_{i=1}^{N} M_i, \qquad (11)$$

где M_p – момент результирующей силы, относительно оси, проходящей через центр масс тела. Можно доказать, что условия (11) являются также достаточными для любого, а не только плоскопараллельного движения абсолютно твёрдого тела, если второе условие выполняется для каких-либо трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр масс тела.

Найдем, например, равнодействующую $\overrightarrow{F_T}$ сил тяжести, действующих на небольшое абсолютно твердое тело вблизи Земли. Так как тело небольшое, то поле сил тяжести можно считать однородным. То есть на любую частицу тела, имеющую массу m_i, действует сила тяжести $\vec{F}_i = m_i\vec{g}$. Следовательно,



$$\vec{F}_{\text{т}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{g} = m\vec{g},$$

где $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – масса рассматриваемого тела. Остается найти линию действия результирующей силы тяжести.

Рассмотри произвольную ось CC', проходящую через центр масс тела C. Пусть она составляет угол α с направлением вектора $\vec{g}$. Направим ось Y параллельно составляющей ускорения свободного падения $\vec{g}_{\perp}$, перпендикулярной оси CC', а начало координат поместим в центр масс тела (см. рисунок). Тогда момент силы $\vec{F}_i$ относительно оси CC' будет равен

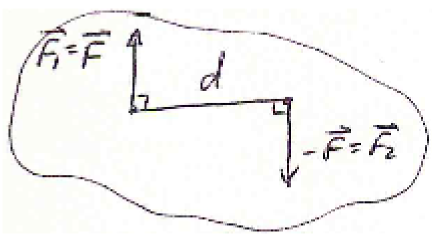
$$M_i = -\, m_i g \sin(a)\, x_i.$$

Суммируя по всем частицам, получим:

$$M \equiv \sum_{i=1}^{N} M_i = -\sum_{i=1}^{N} m_i g \sin(a)\, x_i = -g\, sin(a) \sum_{i=1}^{N} m_i x_i = -g \sin(a)\, m\, x_{\text{ц.м.}} = 0,$$

т.к. начало координат находится в центре масс.

Для выполнения условия $M_p = M(= 0)$ относительно произвольной оси CC', проходящей через центр масс тела (т.е. при произвольном плоскопараллельном движении), очевидно, необходимо и достаточно, чтобы *линия действия результирующей силы тяжести* $\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}$ *проходила через центр масс тела*. Поскольку это должно иметь место также при любой ориентации тела в пространстве, то, значит, $\overrightarrow{F_{\text{т}}}$ *должна быть приложена к центру масс тела*. Поэтому центр масс иногда называют **центром тяжести**.



Заметим, что не имеет результирующей приложенная к абсолютно твердому телу так называемая **пара сил**: две равные по величине и противоположные по направлению силы, линии действия которых разнесены на расстояние d. В этом случае $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 0$, и, значит, центр масс тела покоится или движется равномерно и прямолинейно. Вместе с тем, для оси $CC' \perp \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ имеем $|M_1 + M_2| = |F|d \neq 0$. Следовательно, тело будет вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости действия пары сил и проходящей через центр масс, который будет оставаться неподвижным (или будет двигаться равномерно и прямолинейно). Ясно, что не существует одной силы, действие которой было бы таким же.

Условия равновесия абсолютно твердого тела

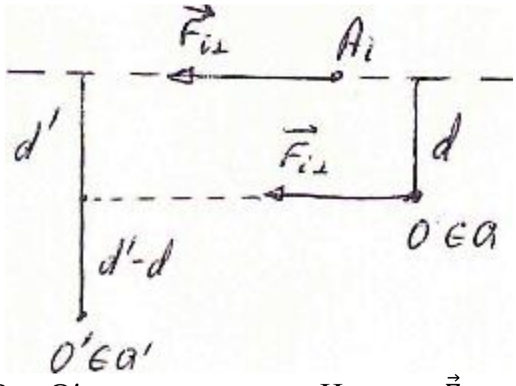
Условия равновесия абсолютно твердого тела являются следствием полученных ранее динамических уравнений: уравнения движения центра масс и уравнения вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс. Из этих уравнений следует, что в *инерциальной системе отсчета твердое тело находится в равновесии (покоится), если в начальный момент тело покоилось и векторная сумма всех действующих на тело внешних сил, а также сумма моментов этих сил относительно каких-либо трёх взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр масс тела, равны нулю*.

При выполнении первого условия ($\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$) равно нулю ускорения центра масс тела. При выполнении второго условия ($\sum_{i=1}^{N} M_i = 0$) – отсутствует угловое ускорение вращения тела ($\frac{d\omega}{dt} = 0$). Поэтому, если в начальный момент тело покоилось, то оно будет оставаться в покое.

Как и в случае частицы, равновесие абсолютно твердого тела бывает устойчивым, неустойчивым и безразличным. Но при определении этих понятий для абсолютно твердого тела необходимо учитывать, что оно в отличие от частицы может совершать вращательное движение.

Определение. Положение равновесия абсолютно твердого тела называют **устойчивым**, если при любых достаточно малых возможных отклонениях тела из положения равновесия действующие на тело силы ***и*** их моменты стремятся вернуть его обратно, и **неустойчивым**, если силы ***или*** их моменты, возникающие хотя бы при некотором сколь угодно малом отклонении, уводят его дальше от положения равновесия. Если же при любых достаточно малых возможных смещениях действующие на тело силы ***и*** их моменты по-прежнему уравновешиваются, то положение равновесия тела называют **безразличным**.

Рассуждая так же, как это делалось для частицы, можно доказать, что ***некоторое состояние равновесия абсолютно твердого тела, на которое действуют только консервативные силы, является состоянием устойчивого равновесия тогда и только тогда, когда потенциальная энергия тела в этом состоянии имеет минимум***. При этом остаются справедливыми и все те замечания и обобщения, которые формулировались в лекции 8 при рассмотрении устойчивости положения частицы.



Утверждение. Если $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{0}$, то сумма моментов сил $\vec{F}_i$ $(i = 1,2, \dots, N)$, вычисленных относительно любых двух параллельных осей a и a', будет одинаковой.

Доказательство. Пусть сила $\vec{F}_i$ приложена в точке A_i $(i = 1,2, \dots, N)$, плоскость рисунка проходит через точку A_i перпендикулярно осям a и a' и пересекает их в точках O и O′ соответственно. И пусть $\vec{F}_{i\perp}$ –

составляющая силы $\vec{F}$ перпендикулярная осям a и a'. Обозначим через $M_a(\vec{F}, C)$ – момент приложенной в точке C силы $\vec{F}$, рассчитанный относительно оси a. Тогда очевидно, имеем:

$$M_{a'}(\vec{F}_i, A_i) = F_{i\perp}d' = F_{i\perp}d + F_{i\perp}(d' - d) = M_a(\vec{F}_i, A_i) + M_{a'}(\vec{F}_i, O).$$

Суммируя по всем силам, получим:

$$M_{a'} = \sum_{i=1}^{N} M_{a'}(\vec{F}_i, A_i) = \sum_{i=1}^{N} M_a(\vec{F}_i, A_i) + \sum_{i=1}^{N} M_{a'}(\vec{F}_i, O) = M_a + M_{a'}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i, O\right), \qquad (12)$$

где использовано ранее доказанное свойство: момент результирующей сил, приложенных в одной точке, равен сумме моментов самих сил. Но по условию $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{0}$, поэтому $M_a = M_{a'}$, что и требовалось доказать.

Из соотношения (12) следует также, что *сумма моментов системы сил, вычисленных относительно двух параллельных осей, будет одинаковой только в двух случаях:*

1) когда сумма этих сил равна нулю;

2) когда вектор суммы этих сил имеет такое направление, что если приложить его к одной из точек одной из осей, то линия его действия пересечет другую ось.

Следствие. *Если ускорение центра масс тела, равновесие которого исследуется, равно нулю в инерциальной системе отсчёта, то моменты действующих на тело сил можно рассчитывать относительно любых осей, в том числе и не проходящих через его центр масс.*

Если же интересуются только условием отсутствия вращательного движения тела, не накладывая ограничений на движение его центра масс, то моменты сил можно рассчитывать только относительно центра масс тела. Дело в том, что в этом случае сумма сил, действующих на тело, может не равняться нулю, и, следовательно, выбор оси, относительно которой рассматриваются моменты сил, уже не может быть произвольным.

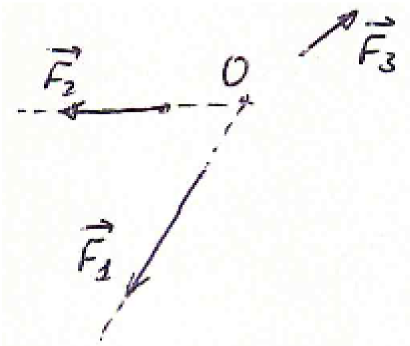
Заметим также, что иногда задачу статики можно решить, вообще не рассматривая условий равновесия, а используя вместо этого закон сохранения энергии применительно к механизмам без трения: *ни один механизм не дает выигрыша в работе*. Это утверждение часто называют **золотым правилом механики**.

Теорема о трех силах

Часто встречаются ситуации, в которых абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием трех сил. В этом случае полезна следующая теорема.

Теорема о трёх силах. Если абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием трех сил, из которых хотя бы у двух линии действия пересекаются, то линии действия всех трех сил лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть из трех сил $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ и $\overrightarrow{F_3}$, линии действия пересекаются у сил $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$ и O – точка их пересечения. Направим ось Oz перпендикулярно плоскости OF_1F_2, в которой лежат силы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$. Из условий равновесия абсолютно твердого тела следует, что сумма моментов всех трех сил относительно оси Oz равна нулю: $M_{1,z} + M_{2,z} + M_{3,z} = 0$. Но линии действия сил $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$ проходят через точку O, поэтому $M_{1,z} = M_{2,z} = 0$. Следовательно, и $M_{3,z} = 0$, т. е. линия действия силы $\overrightarrow{F_3}$ пересекает ось Oz. Аналогично доказывается, что линия действия силы $\overrightarrow{F_3}$ пересекает любую прямую, проходящую через точку O (например, прямые OF_1 и OF_2). Но все это возможно только, если линия действия силы $\overrightarrow{F_3}$ проходит через точку O.



Еще одним условием равновесия абсолютно твердого тела является равенство нулю суммы всех сил: $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = 0$. Спроецируем это векторное равенство на ось Oz: $F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = 0$. Но силы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$ перпендикулярны оси Oz (так как ось Oz перпендикулярна плоскости, в которой эти силы лежат), поэтому $F_{1z} = F_{2z} = 0$, и, следовательно, $F_{3z} = 0$. Последнее означает, что сила $\overrightarrow{F_3}$ также перпендикулярна оси Oz. Кроме того, как было доказано, линия действия силы $\overrightarrow{F_3}$ проходит через точку O. Значит линии действия всех трех сил $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, и $\overrightarrow{F_3}$ лежат в плоскости OF_1F_2 и пересекаются в точке O. Теорема доказана.

Теорема Кёнига. Кинетическая энергия абсолютно твердого тела

Теорема Кёнига. Кинетическая энергия $W_к$ системы частиц равна сумме кинетической энергии поступательного движения системы со скоростью $\overrightarrow{v_c}$ её центра масс и кинетической энергии $W'_к$ относительного движения частиц по отношению к поступательно движущейся системе отсчета с началом в центре масс.

Доказательство. По формуле сложения скоростей $\vec{v}_i = \overrightarrow{v_c} + \vec{v}_i{}'$ $(i = 1,2, \dots, N)$, где $\vec{v}_i{}'$ – скорость движения i-ой частицы в поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром масс. Заметим, что в этой системе отсчета:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i{}' = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_i - \overrightarrow{v_c}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{v_c} = M\overrightarrow{v_c} - M\overrightarrow{v_c} = 0.$$

Поэтому, обозначая $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – суммарная масса всех частиц системы, получим:

$$W_{к} \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \left(\vec{v_c} + \vec{v}_i{}'\right)^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v_c}^{\,2}}{2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_i{}'^{2}}{2} + \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \, \vec{v}_i{}', \vec{v_c}\right) =$$

$$= \frac{m v_c{}^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i{}'^2}{2} + \left(\vec{0}, \vec{v_c}\right) = \frac{m v_c{}^2}{2} + W_{к}'.$$

Теорема доказана.

Если система частиц образует твердое тело, совершающее плоскопараллельное движение, то её движение в поступательно движущейся системе отсчета с началом в центре масс может быть только вращательным вокруг оси, проходящей через центр масс. Поэтому в этом случае $v_i{}' = \omega r_{i\perp}$, где ω – угловая скорость вращения, а $r_{i\perp}$ – расстояние от i-й частицы до оси вращения. Следовательно,

$$W_{к}' \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i{}'^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, (\omega r_{i\perp})^2 = \frac{1}{2} I_c \omega^2, \qquad (13)$$

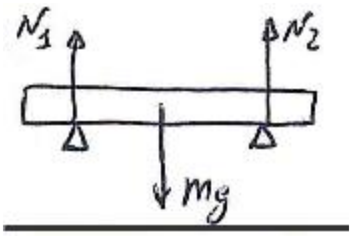
где I_c – центральный момент инерции абсолютно твердого тела относительно оси его вращения. Можно доказать, что формула (13) справедлива и для произвольного, а не только плоскопараллельного движения абсолютно твердого тела. В этом случае ω – угловая скорость вращения относительно **мгновенной** оси вращения, ориентация которой относительно тела может меняться с течением времени, т.е. I_c в общем случае может зависеть от времени. Таким образом, для абсолютно твердого тела теорема Кёнига имеет вид: *кинетическая энергия произвольного движения абсолютно твердого тела равна сумме кинетической энергии его поступательного движения со скоростью центра масс и кинетической энергии его вращательного движения относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс*:

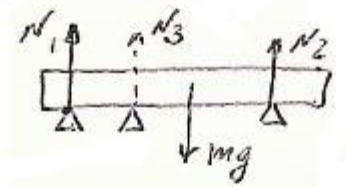
$$W_{к} = \frac{m v_c{}^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2} = W_{пост} + W_{вращ}.$$

Применимость модели абсолютно твердого тела

Заметим, что *не всегда малая величина деформаций является достаточным условием того, что тело можно считать абсолютно твердым*.

Рассмотрим в качестве примера жесткую гладкую балку, лежащую на двух опорах, расположенных на одной горизонтали. Пусть нас интересуют силы нормальной реакции опор N_1 и N_2. Тогда достаточно жесткую балку можно считать абсолютно твердым телом, несмотря на то, что она слегка прогибается под действием сил тяжести. Дело в том, что в этом случае условий механического равновесия абсолютно твердого тела достаточно для нахождения N_1 и N_2, а радиус кривизны изгиба палки много больше ее длины, поэтому отклонением векторов $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$ от вертикали можно пренебречь.





Но если та же балка лежит на трех опорах, то рассматривать её как абсолютно твердое тело нельзя! В самом деле, пусть крайние опоры находятся на одной горизонтали, а средняя опора – чуть ниже. Если балка абсолютно твердая, т.е. вообще не прогибается, то она совсем не давит на среднюю опору. Если же балка прогибается, то она давит на неё, причем тем сильнее, чем больше деформация балки. Более того, условия равновесия абсолютно твердого тела не позволяют определить силы реакции всех трёх опор, так как дают два уравнения относительно трех неизвестных. Для решения задачи необходимо учитывать упругие свойства балки.

Приведенный пример показывает, что *применимость модели абсолютно твердого тела в статике определяется не только свойствами тела, но и условиями, в которых оно находится*.