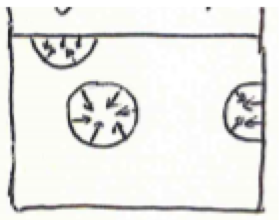
Лекция 10

Введение в гидростатику. Стационарное движение жидкости. Уравнение Бернулли

Давление. Сила давления

При исследовании механических свойств жидкостей изучают не движение каждой отдельной молекулы, а поведение так называемых «жидких частиц» – объема жидкости, малого по сравнению с объемом всей жидкости, но достаточно большого, чтобы можно было не интересоваться его внутренней структурой.



Удобно различать два вида сил, действующих на «жидкие частицы». К первому виду относятся силы, действующие подобно силе тяжести на каждый элемент объема. Эти силы называются **объемными**. Ко второму виду относятся силы, возникающие в результате непосредственного контакта между взаимодействующими элементами жидкости, газа и твердых тел на их общих границах. Эти силы называют **поверхностными**. На рисунке изображены поверхностные силы, действующие на неподвижные частицы жидкости со стороны окружающей их жидкости, атмосферного воздуха и стенок сосуда.

Характерной особенностью жидкостей и газов является легкость, с которой можно изменять их форму без изменения объема. Это приводит к тому, что в случае жидкости или газа, находящихся в равновесии, поверхностные силы, действующие на любой участок их поверхности, перпендикулярны к ней. В противном случае, так как жидкости и газы не оказывают сопротивления изменению формы, их поверхностные слои двигалась бы вдоль поверхности, т.е. они не находились бы в равновесии. Именно поэтому в статике жидкостей и газов такую большую роль играет **давление**.

Определение. Пусть на некоторую малую плоскую (элементарную) площадку площадью dS действует сила $d\vec{F}$. Давлением называется отношение величины нормальной составляющей силы $d\vec{F}$ к величине dS:

$$p = \frac{dF_n}{dS} = \frac{dF\,\cos(\alpha)}{dS},$$

где α – острый угол между линией действия силы $d\vec{F}$ и нормалью к площадке dS.

Давление – скалярная величина. В СИ давление измеряется в паскалях. Один паскаль (Па) это давление, производимое силой 1Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1м^2.

Часто говорят также о **силе давления** $\overrightarrow{F_g}$. В случае элементарной площадки dS силой давления называют нормальную составляющую действующей на нее силы:

$$\overrightarrow{F_g} = \overrightarrow{F_n} = p\,dS\,\vec{n} = p\,d\vec{S}$$

Здесь и далее $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к площадке dS, $d\vec{S} = dS\,\vec{n}$. *Для произвольной поверхности S силой давления $\overrightarrow{F_g}$ на эту поверхность называют векторную сумму сил давления на составляющие её элементарные площадки*:

$$\overrightarrow{F_g} = \sum_{i=1}^{N} p_i dS_i \overrightarrow{n_i} = \sum_{i=1}^{N} p_i d\vec{S}_i$$

Подчеркнем, что *сила давления (в отличие от давления) величина векторная*.

Закон Паскаля

Закон Паскаля утверждает: *поверхностные силы, действующие на неподвижную жидкость (или газ) создают давление, одинаковое во всех* ***точках*** *жидкости (или газа).*

В качестве поверхностных сил могут выступать сила атмосферного давления, силы поверхностного натяжения, силы давления, действующие на жидкость со стороны соприкасающихся с ней тел.

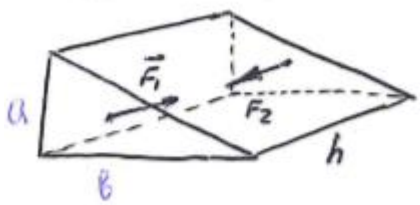
Заметим, что на самом деле закон Паскаля состоит из двух утверждений: давление, оказываемое на небольшую площадку dS, помещенную внутри жидкости или газа, находящихся в состоянии равновесия,

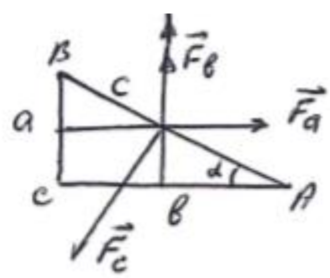
1) *не зависит от ориентации площадки, т.е. можно говорить о давлении* ***в точке*** *(а не на площадку);*

2) *при отсутствии объемных сил, не зависит от местоположения площадки внутри жидкости*.

Доказать эти утверждения можно, применив метод «отвердения». Его суть заключается в том, что внутри жидкости мысленно выделяется некоторая её часть и считается, что она затвердела. Так как её объем, масса, плотность, температура и все другие физические свойства (кроме подвижности молекул) остались прежними, то эта затвердевшая часть жидкости должна по-прежнему находиться в равновесии, и, следовательно, можно воспользоваться условиями равновесия абсолютно твердого тела.

Возьмём в качестве такой мысленно выделенной части **небольшую** прямоугольную призму, имеющей основанием прямоугольный треугольник с произвольным острым углом α. На все грани призмы со стороны окружающей жидкости действуют силы давления перпендикулярные им:





$$F_1 = \frac{1}{2}abp_1, \qquad F_2 = \frac{1}{2}abp_2, \qquad F_a = ahp_a, \qquad F_b = bhp_b, \qquad F_c = chp_c,$$

где p_1, p_2 – внешние давления на противоположные основания призмы, а p_a, p_b, p_c – давления на соответствующие боковые грани призмы (см. рисунок). Беря призму достаточно малой, можно добиться того, чтобы объемные силы (пропорциональные объему призмы) были малы по сравнению с поверхностными силами, действующими на каждую из граней. Тогда из условий равновесия следует, что силы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$, действующие на основания призмы, равны и противоположны. Поэтому

$$p_1 = p_2. \qquad (1)$$

Силы, действующие на боковые грани, также в сумме должны давать ноль:

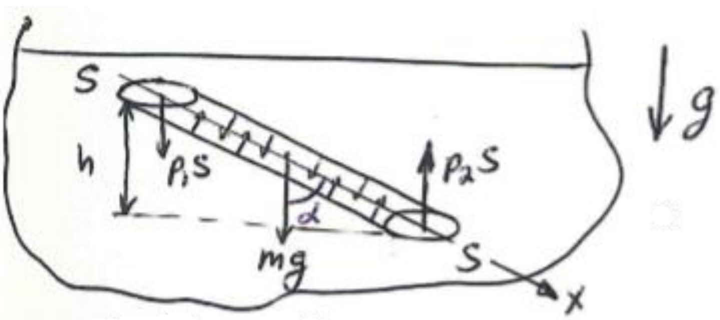
$$\overrightarrow{F_a} + \overrightarrow{F_b} + \overrightarrow{F_c} = 0.$$

Следовательно, вектора $\overrightarrow{F_a}$, $\overrightarrow{F_b}$ и $\overrightarrow{F_c}$ образуют треугольник сил. Так как все силы перпендикулярны соответствующим сторонам ΔABC, то треугольник сил подобен ΔABC (по трем углам). Поэтому

$$\frac{F_a}{a} = \frac{F_b}{b} = \frac{F_c}{c} \Rightarrow p_a = p_b = p_c\,. \qquad (2)$$

В силу произвольности угла α соотношение (2) доказывает, что давление не зависит от ориентации площадки. Если объемные силы отсутствуют, то высота призмы h не обязана быть малой. В этом случае соотношение (1) доказывает, что при отсутствии объемных сил давление не зависит от местоположения площадки.

Не оказывая сопротивления изменению формы, жидкости и газы сопротивляются изменению объема. Газы обладают способностью к неограниченному расширению. Напротив, для жидкости характерен определенный собственный объем, который лишь незначительно меняется при изменении внешнего давления. Во многих случаях изменение объема жидкости столь мало, что им можно пренебречь и рассматривать жидкость как абсолютно несжимаемую, и, следовательно, имеющую постоянную плотность. Как и для модели абсолютно твердого тела, *применимость представления об абсолютно несжимаемой жидкости определяется не столько свойствами самой жидкости, сколько условиями, в которых она находится*.



В поле земного тяготения давление в жидкости, хотя и не зависит от ориентации площадки, оказывается разным на разной глубине. Для несжимаемой жидкости зависимость давления от глубины может быть легко найдена. Рассмотрим с этой целью условия равновесия мысленно выделенного объема жидкости в виде наклонного цилиндра высоты h с горизонтально ориентированными основаниями малой площади S. Тогда, учитывая наряду с силами давления со стороны остальной жидкости, также и силу тяжести $mg = \rho g h S$, действующую на выделенный объем, получим (из условия равновесия вдоль оси X)

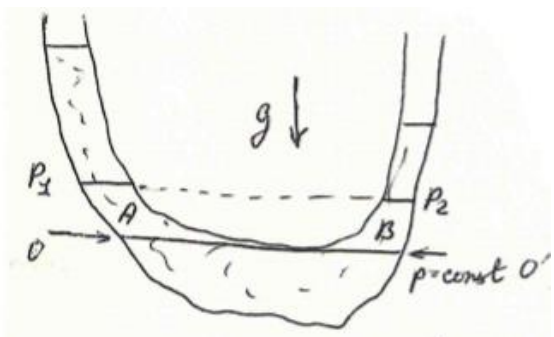
$$(-p_2 + p_1 + g\rho h)S\,cos(\alpha) = 0, \qquad \text{т.е. } p_2 - p_1 = g\rho h, \qquad (3)$$

где p_1 и p_2 – давления у верхнего и нижнего оснований цилиндра, ρ – плотность жидкости.

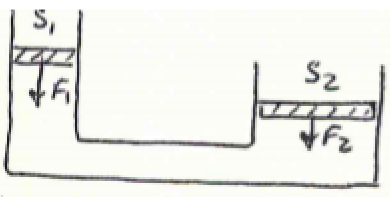
Обусловленное силой тяжести давление в жидкости носит название **гидростатического давления**. Мы доказали, что разность гидростатических давлений на разной глубине выражается формулой (3), если жидкость имеет постоянную плотностью ρ. В случае неоднородной жидкости тоже можно применить эту формулу, разбив жидкость на тонкие слои Δh, в пределах каждого из которых плотность жидкости можно считать постоянной.

Из формулы (3) следует, что если в сосуды различной формы, но с одинаковыми основаниями налить одинаковые жидкости до одинаковых уровней, то силы давления на дно в этих сосудах окажутся одинаковыми, хотя масса жидкости в разных сосудах будет разная. Для объяснения этого, так называемого **гидростатического парадокса** необходимо учесть, кроме силы тяжести, еще и силы давления (силы нормальной реакции опоры), действующие на жидкость со стороны боковых стенок сосуда (см. рис).

Независимость гидростатического давления от формы сосуда приводит к тому, что *в сообщающихся сосудах покоящаяся однородная жидкость всегда устанавливается на одном уровне, если наружное давление во всех сосудах одинаково*. Этот факт называется **законом сообщающихся сосудов**.



Если в сосуды налиты различные жидкости, то их уровни могут быть разными, но всегда давление в объединяющем их трубопроводе на одном и том же уровне (OO′) будет одинаково. Заметим, однако, что давления p_1 и p_2 (см. рисунок) могут быть разными, если в областях A и B находятся различные жидкости.



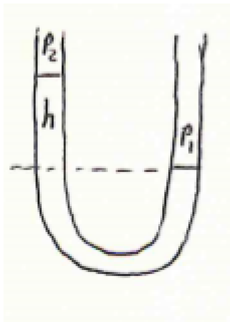
Из практически важных применений закон Паскаля упомянем **гидравлический пресс**: два заполненных жидкостью сообщающихся цилиндра различных поперечных сечений S_1 и S_2 с подвижными поршнями. По закону Паскаля в пренебрежении гидростатическим давлением, которое в таких системах обычно относительно мало, получим, что в состоянии равновесия

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}, \text{ то есть } \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Таким образом, *гидравлический пресс дает выигрыш в силе*. При небольшом нарушении равновесия в системе поршни начнут двигаться. Если пренебречь силами трения, сжимаемостью жидкости и изменением потенциальной энергии в поле сил тяжести Земли, то по закону изменения механической энергии получаем: $A_{F_1} = A_{F_2}$. Этот же результат можно получить и непосредственно. Пусть поршень в цилиндре сечением S_1 при прикладывании силы чуть большей F_1 медленно опускается на высоту h_1 от своего первоначального равновесного положения. Тогда поршень во втором цилиндре поднимется на некоторую высоту h_2, которую для несжимаемой жидкости можно найти из условия постоянства объема: $S_1 h_1 = S_2 h_2$. Поэтому:

$$A_1 = F_1 h_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2} h_1 = F_2 h_2 \frac{S_1 h_1}{S_2 h_2} = F_2 h_2 = |A_2|.$$

В реальных системах надо обязательно учитывать силы трения, которые уменьшат полезную работу гидравлического пресса A_2. Сжимаемость жидкости также уменьшает полезную работу, т.к. часть работы идёт на сжатие жидкости, т.е. на увеличение её потенциальной энергии упругой деформации. Таким образом, *гидравлический пресс не даёт выигрыша в работе*.



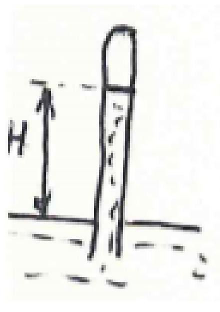
Если в сообщающиеся сосуды налита однородная жидкость плотности ρ, но при этом давление над жидкостью в сосудах различно, то жидкость установится на разных уровнях, причем по разности уровней легко найти разность давления над жидкостью в разных сосудах. Например, для изображенного на рисунке случая:

$$p_1 - p_2 = \rho g h.$$

На этом принципе основана работа **жидкостного манометра**.

Опыт Торричелли. Зависимость атмосферного давления от высоты

Атмосферный газ, окружающий земной шар в силу притяжения к Земле, оказывает давление на поверхность Земли подобно тому, как жидкость оказывает давление на дно сосуда. Величину атмосферного давления впервые измерил Торричелли.



Опыт Торричелли состоял в следующем. Стеклянная трубка длинной около одного метра *полностью* заполнялась ртутью. Закупоренная трубка не запаянным концом опускалась в сосуд с ртутью и открывалась. При этом ртуть вытекала из трубки не вся, а останавливалась на высоте H (около 75 см). С точки зрения гидростатики условие равновесия выглядит так: атмосферное давление уравновешивается давлением столба ртути в трубке и давлением насыщенных паров ртути, находящихся в пространстве над ртутью («торричеллиева пустота»):

$$p_{\text{атм}} = p_{\text{рт}} + p_{\text{пар}}.$$

Сейчас известно, что при комнатной температуре давление насыщенных паров ртути примерно в миллион раз меньше атмосферного давления, и с большой степенью точности можно считать, что:

$$p_{\text{атм}} = p_{\text{рт}} = \rho g H.$$

Трубка Торричелли может служить прибором для измерения атмосферного давления (барометром). Атмосферное давление измеряют в Па, но можно также пользоваться внесистемной единицей – миллиметр ртутного столба (мм. рт. ст.), называемой также «торр».

Опыт Торричелли можно проводить с любой жидкостью. Максимальная высота столба остающейся в трубке жидкости будет зависеть от её плотности. Так, при нормальном атмосферном давлении (760 мм. рт. ст.) в аналогичном опыте вода остановится на высоте 10,3 м.

Давление атмосферы меняется по мере удаления от поверхности Земли, так же, как давление в жидкости уменьшается при удалении от дна сосуда. Разница состоит в том, что плотность жидкости практически постоянна, а плотность газа зависит от давления. Оказывается, что при постоянной температуре газа его плотность ρ пропорциональна его давлению p:

$$\rho = ap,$$

где a – константа, зависящая от состава газа и его температуры. Поэтому при подъеме в атмосфере на малую высоту dH давление уменьшается на величину $dp = -\rho g dH = -apgdH$. Следовательно,

$$\frac{dp}{dH} = -agp.$$

В курсе математического анализа будет доказано, что функция, производная которой пропорциональна самой функции, является экспонентой, т.е. показательной функцией с основанием e = 2,718…. Пользуясь этим, получим, что для изотермической атмосферы (в пренебрежении зависимости ускорения свободного падения от высоты H):

$$p = p_0 e^{-agH},$$

где p_0 равно давлению у поверхности Земли (H = 0).

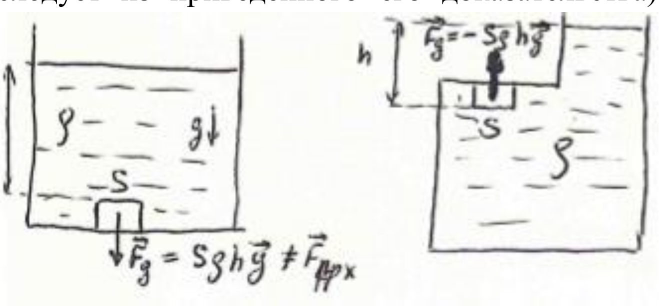
Закон Архимеда

Наличие обусловленного полем тяжести (или другими объёмными силами, действующими подобно силе тяжести на каждый элемент объема) гидростатического давления приводит к существованию статической подъемной силы, действующей на погруженные в жидкость или газ тела.

Закон Архимеда: *на погруженное в жидкость и (или) газ тело действует выталкивающая сила, равная по величине и противоположная по направлению весу жидкости и (или) газа в объеме погруженной части тела*.

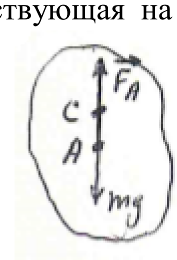
Для доказательства выделим в жидкости объем произвольной формы (для газа доказательство проводится аналогично). В равновесии действующая на жидкость в выделенном объеме сила тяжести уравновешивается силами гидростатического давления, действующими на поверхность выделенного объема со стороны окружающей жидкости. По III закону Ньютона с такой же по величине, но противоположной по направлению силой, называемой его весом, выделенный объем жидкости действует на окружающую его жидкость. Если *заменить* выделенный объем жидкости твердым телом точно такой же формы, то распределение окружающей жидкости и, следовательно, действующие на поверхность тела силы гидростатического давления не изменятся. Значит, их равнодействующая сила будет по-прежнему равна по величине и противоположна по направлению весу выделенного объема жидкости. Это и есть архимедова выталкивающая сила, действующая на погруженное в жидкость тело. Из приведенного доказательства также следует, что линия действия силы Архимеда проходит *через центр масс вытесненной жидкости* (!) и не зависит от положения центра масс погруженного тела. Центр масс вытесненной телом жидкости называют **центром плавучести тела**.

Подчеркнем, что закон Архимеда (как следует из приведенного его доказательства) справедлив только в том случае, когда тело граничит со всех сторон только с жидкостью или газом. Если же оно соприкасается с твердой поверхностью, то **закон Архимеда не выполняется** (см. рис.)!



Условия равновесия тела, плавающего в жидкости, и его устойчивость

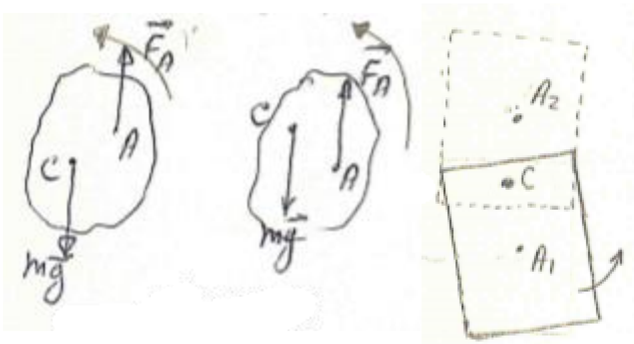
Из закона Архимеда и условий равновесия абсолютно твердого тела следует, что для равновесия тела, плавающего в жидкости необходимо, чтобы сила тяжести, действующая на тело, была равна весу вытесненной им жидкости, и центр плавучести лежал на одной вертикали с центром масс самого тела.



Что касается устойчивости состояния равновесия, то мы ограничимся рассмотрением двух случаев.

Случай 1. *Плавающее тело погружено в **однородную** жидкость целиком* (средняя плотность тела равна плотности жидкости).

В этом случае при любых смещениях и поворотах тела его центр масс *C* и центр плавучести *A сохраняют свои положения относительно тела*. Простейшее рассмотрение показывает, что при этом *равновесие устойчиво, если центр масс тела C лежит ниже его центра плавучести A, и неустойчиво, если он лежит выше точки A*. Действительно, если тело слегка



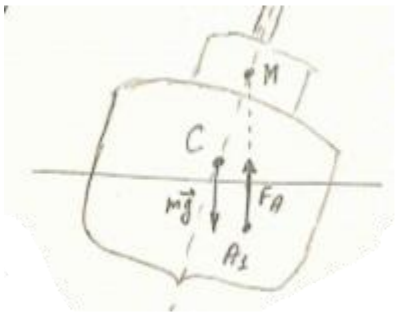
повернуть относительно положения равновесия вокруг горизонтальной оси, то в обоих случаях (см. рисунки) момент пары сил $m\vec{g}$ и $\overrightarrow{F_A}$ будет вращать тело относительно центра масс, поднимая при этом точку *A*. В результате тело придет в положение устойчивого равновесия, в котором точка *A* расположена выше точки *C*, оставшейся на прежнем месте.

Такая идеализированная картина наблюдается, однако, только ***если тело и жидкость имеют одинаковые сжимаемости***, и, следовательно, равновесие тела в жидкости является безразличным относительно глубины погружения (их средние плотности совпадут на любой глубине).

Если ***сжимаемость тела меньше, чем у жидкости*** (для сплошных твердых тел так обычно и бывает), *то из-за влияния гидростатического давления тело будет устойчиво плавать только на определенной глубине*. Действительно, с ростом глубины плотность жидкости в этом случае будет возрастать быстрее, чем плотность тела. Они будут равны только при определенной глубине H_0 погружения тела. При меньшей глубине погружения плотность тела будет больше плотности жидкости, и оно будет тонуть. При глубине погружения большей H_0 плотность тела будет меньше плотности жидкости, и оно будет всплывать.

Наоборот, ***если сжимаемость тела больше сжимаемости жидкости*** (например, это обычно имеет место для полых конструкций), то это тело будет всплывать при глубине погружения даже чуть меньше равновесной H_0 и тонуть в противном случае. Т.е. *положение равновесия плавающего тела будет неустойчивым*. Именно поэтому подводные лодки не могут неподвижно зависать на одной глубине. Дело в том, что в погруженном положении подъемная сила, действующая на подводную лодку, немного больше нуля, и *при движении* ей не дают всплыть специальным образом ориентируемые горизонтальные рули. Поэтому, если лодка остановится, то она начнет медленно всплывать. При необходимости же экстренного погружения, заполняется специальная цистерна экстренного погружения. Ложиться на дно подводной лодке достаточно опасно, т.к. её может прижать ко дну, а сила Архимеда действует только на тела, полностью окруженные жидкостью или газом. В результате в дальнейшем лодка может больше не всплыть.

Случай 2. *Средняя плотность тела меньше плотности жидкости*, т.е. часть тела выступает над поверхностью и окружена газом, сила Архимеда со стороны которого в таких случаях пренебрежимо мала. По сравнению с предыдущим этот случай является более сложным, т.к. при смещении тела из положения равновесия меняется форма вытесняемого им объема жидкости. В результате положение центра плавучести относительно плавающего тела меняется, что и усложняет исследование. Рассматриваемый случай представляет основной интерес при исследовании устойчивости плавающих кораблей. На рисунке изображен схематически корабль, накренённый на некоторый угол α от вертикального положения. При этом центр плавучести смещен в некоторую точку A_1 (расчет ее положения является достаточно сложной задачей), смещенную относительно плоскости симметрии корабля в ту же сторону, куда накренился корабль. Проведем через точку A_1 вертикаль, которая является линией действия силы Архимеда. Точка M пересечения этой линии с плоскостью симметрии корабля называется **метацентром**. Если метацентр лежит выше центра масс корабля C, то момент выталкивающей силы относительно центра масс корабля стремится возвратить корабль в вертикальное положение, и корабль плавает устойчиво. Если же даже при малых углах крена метацентр лежит ниже центра тяжести корабля, то плавание корабля в вертикальном положении будет неустойчивым.



Движение жидкости. Уравнение Бернулли

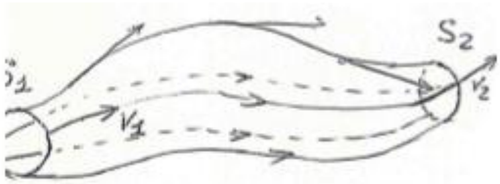
Определение. **Стационарный поток** – такое движение жидкости (или газа), при котором *в каждой точке пространства* характеристики жидкости (или газа): скорость, плотность, давление не изменяются со временем.

Двигаясь в стационарном потоке, частички жидкости могут менять свою скорость со временем. Однако, любая частица, попав в данную точку пространства, будет иметь одну и ту же скорость. Стационарному потоку можно приписать определенное распределение скоростей (плотности, давления) в пространстве, которое не зависит от времени, то есть можно говорить, например, о стационарном поле скоростей.

Определение. Линии, касательные к которым в каждой их точке совпадают с направлением скорости жидкости в этой точке, называются **линиями тока**.

Очевидно, что линии тока не могут пересекаться друг с другом. В стационарном потоке линии тока неподвижны и совпадают с траекториями отдельных частиц жидкости (напомним, что скорость частицы направлена всегда по касательной к траектории). Однако, в случае неустановившегося движения линии тока не совпадают с траекториями частиц, т.к. траектория любой частицы это что-то не зависящее от времени, а линии тока в нестационарном потоке жидкости (или газа) меняются с течением времени, показывая распределение скоростей частиц жидкости в данный момент времени.

Определение. Часть жидкости в форме трубки, боковая поверхность которой образована линиями тока, называется **трубкой тока**.



Поскольку в стационарном потоке линии тока неподвижны и совпадают с траекториями отдельных частиц жидкости, то трубки тока в стационарном потоке также неподвижны и *движущийся объем жидкости не выходит за пределы своей трубки тока*.

Если выбрать трубку тока с поперечным (ориентированным перпендикулярно линиям тока) сечением dS настолько малым, чтобы скорость жидкости v во всех точках сечения была приблизительно одинакова, то количество жидкости Δm, протекающей через это сечение за любое время Δt, будет равно $\Delta m = \rho v dS \Delta t$. В стационарном потоке величина Δm одна и та же для любых поперечных сечений выбранной трубки тока, т.к. количество жидкости между любыми двумя сечениями трубки тока не меняется. Поэтому

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho_1 v_1 dS_1 = \rho_2 v_2 dS_2 \qquad (4)$$

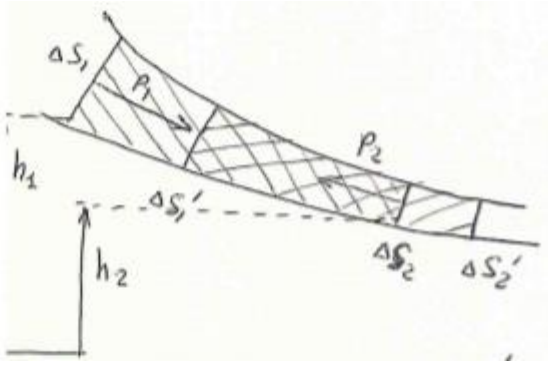
Формула (4) отражает ***условие стационарности струи***. Для несжимаемой жидкости ($\rho_1 = \rho_2$) условие (4) приводит к **уравнению неразрывности струи**: вдоль трубки тока

$$dSv = const. \qquad (5)$$

Из (5) следует, что скорость течения несжимаемой жидкости увеличивается при сужении трубки тока, т.е. при увеличении густоты линий тока.

Динамика движения реальной жидкости очень сложна. Для упрощения ее описания в некоторых случаях можно пренебречь силами внутреннего трения. Такую жидкость называют **идеальной**. При движении идеальной жидкости не происходит превращения механической энергии во внутреннюю энергию, т.е. механическая энергия жидкости сохраняется. Закон сохранения механической энергии для *идеальной несжимаемой жидкости* выражается **уравнением Бернулли**.

Для вывода уравнения Бернулли рассмотрим часть жидкости, заключенную между сечениями ΔS_1 и ΔS_2 ***достаточно узкой трубки тока***, расположенными соответственно на высотах h_1 и h_2 относительного точки с нулевой потенциальной энергией сил тяжести. За малый промежуток времени dt эта жидкость смещается вдоль трубки тока и занимает новое положение между сечениями $\Delta S_1{}'$ и $\Delta S_2{}'$. Для достаточно малого промежутка времени dt можно пренебречь различиями между площадями ΔS_n и $\Delta S_n'$ $(n = 1,\ 2)$ старых и новых сечений и различиями в их высотах. Найдём работу, совершаемую не потенциальными силами над рассматриваемой жидкостью за время dt. Жидкость идеальная, поэтому силы трения равны нулю. Силы давления, действующие на боковую поверхность трубки тока, работы не совершают, так как действуют перпендикулярно скорости жидкости. Работа силы давления внешней жидкости на сечение ΔS_1 равна $A_1 = p_1 \Delta S_1 v_1 dt$, а работа силы давления внешней жидкости на сечение ΔS_2 – $A_2 = -\,p_2 \Delta S_2 v_2 dt$, так что полная работа не потенциальных сил



$\delta A_{\text{непот}} = p_1 \Delta S_1 v_1 dt - p_2 \Delta S_2 v_2 dt$ (6)

В силу стационарности движения энергия жидкости между сечениями $\Delta S_1'$ и ΔS_2 не меняется. Поэтому изменение энергии рассматриваемой жидкости равно энергии части жидкости между сечениями ΔS_2 и $\Delta S_2'$ минус энергия части жидкости между сечениями ΔS_1 и $\Delta S_1'$. Потенциальная энергия части жидкости между ΔS_2 и $\Delta S_2'$ равна $U_2 = \rho \Delta S_2 v_2 dt g h_2$, а её кинетическая энергия – $К_2 = \frac{1}{2}\rho \Delta S_2 v_2 dt v_2^2$. Аналогичный вид имеют выражения для потенциальной и кинетической энергий жидкости между сечениями ΔS_1 и $\Delta S_1'$. Поэтому изменение энергии всей рассматриваемой части жидкости за время dt равно:

$$dE = \rho \Delta S_2 v_2 dt g h_2 + \frac{1}{2}\rho \Delta S_2 v_2 dt v_2^2 - \left(\rho \Delta S_1 v_1 dt g h_1 + \frac{1}{2}\rho \Delta S_1 v_1 dt v_1^2\right) \qquad (7)$$

Пользуясь законом изменения механической энергии ($dE = \delta A_{\text{непот}}$) и условием неразрывности струи для несжимаемой жидкости (5), из (6) и (7) получим:

$$\rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \left(\rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2\right) = p_1 - p_2$$

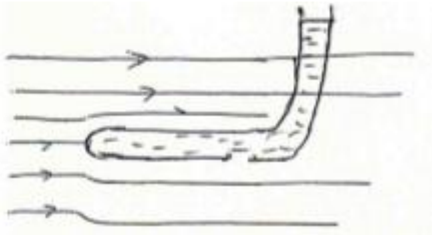
или

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = const \qquad (8)$$

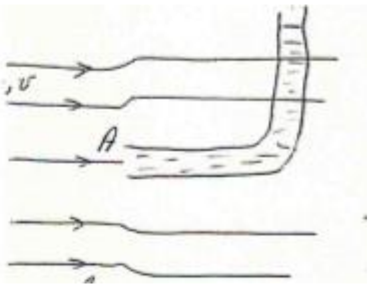
вдоль узкой трубки тока. Уравнение (8) и есть **уравнение Бернулли**. Оно было выведено для достаточно узкой трубки тока, и строго говоря, справедливо, когда эта трубка сжимается в линию тока. Поэтому говорят, что *левая часть (8) остается постоянной вдоль одной и той же линии тока*.

В неподвижной жидкости в состоянии равновесия согласно закону Паскаля давление не зависит от ориентации площадки. Оказывается, что в движущейся жидкости это не так.

Представим себе манометр в виде изогнутой трубки, передняя часть которой, обращенная навстречу потоку, запаяна, а в боковой стенке имеется отверстие. Такая трубка искажает поток жидкости только вблизи ее переднего конца, а вблизи отверстия поток практически не меняется. Поэтому давление здесь такое же, как и во всех других точках линии тока, проходящей вблизи отверстия. Соединенный с такой трубкой манометр измеряет давление жидкости p, входящее в уравнение Бернулли. Такое же давление покажет манометр, движущийся вместе с потоком.



Рассмотрим теперь трубку с открытым передним концом, обращенным навстречу потоку жидкости. Так как жидкость внутри трубки неподвижна, то линия тока, упирающаяся в открытый конец трубки, обрывается в точке A и скорость жидкости в этой точке обращается в нуль. Обозначим давление в этой точке p_A, а давление и скорость потока на этой же линии тока вдали от трубки через p и v. Тогда согласно уравнению Бернулли:



$$p_A = p + \frac{\rho v^2}{2}.$$

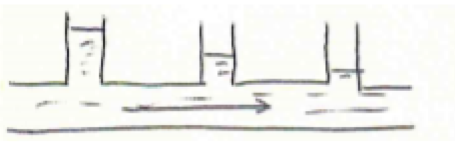
Именно это давление и показывает соединенный с трубкой манометр.

Заметим, что для горизонтальной трубки тока уравнение Бернулли принимает вид:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = const.$$

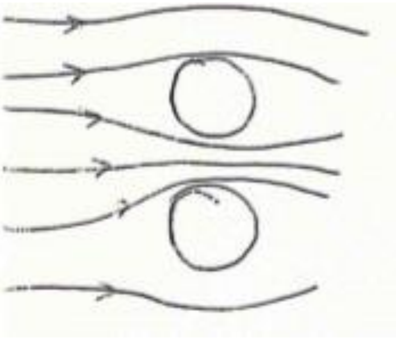
Физический смысл этой формулы достаточно прозрачен. Жидкость, попадая в более узкую часть трубки, ускоряется. Давление по обе стороны некоторого мысленно выделенного объема жидкости, должно быть разным, что обеспечит необходимое ускорение. То есть *увеличение скорости на горизонтальной линии тока связано с уменьшением давления*.

Для реальных жидкостей уравнение Бернулли, строго говоря, не выполняется. Сжимаемость их, правда, мала, а вот внутреннее трение может быть значительным. При наличии внутреннего трения давление вдоль горизонтальной трубки постоянного сечения падает (компенсируя силу внутреннего трения), даже при постоянной скорости течения.



Уравнение Бернулли (8) неприменимо также и для газов, из-за их сжимаемости. Однако в ряде случаев уравнение Бернулли может быть обобщено и на газы. Кроме того для газов и реальных жидкостей справедлива качественная формулировка уравнения Бернулли: *чем выше скорость на горизонтальной линии тока, тем ниже давление* (**закон Бернулли**).

В качестве примера проявления закона Бернулли рассмотрим два близко расположенных цилиндра с осями, перпендикулярными скорости плоскопараллельного потока жидкости. В пространстве между цилиндрами линии тока сгущаются – здесь скорость жидкости больше, чем с внешних сторон. Согласно уравнению Бернулли увеличение скорости в этом месте приведет к уменьшению давления и к появлению сил, сближающих цилиндры. В практике



судовождения известны случаи столкновения судов, идущих близко друг к другу в одном направлении.