## Лекция 8

## Законы изменения и сохранения энергии. Потенциальная энергия взаимодействия частиц. Вторая и третья космические скорости

### Законы изменения и сохранения энергии для одной и двух частиц

Разобьём все силы, действующие на интересующую нас частицу на две группы: *консервативные и неконсервативные*. Заметим, что во вторую группу могут быть включены не только действительно неконсервативные силы, но и силы, которые являются консервативными, но по каким-либо причинам мы не хотим включать их в первую группу сил и вводить для них потенциальную энергию.

Пусть за некоторый промежуток времени частица совершила некоторое перемещение. По теореме об изменении кинетической энергии частицы имеем:

$$\Delta K \equiv K_{\text{кон}} - K_{\text{нач}} = A_{\text{конс}} + A_{\text{неконс}}\,, \qquad (1)$$

где $A_{\text{конс}}$ – работа результирующей всех действующих на частицу *консервативных* сил, а $A_{\text{неконс}}$ – работа результирующей всех *неконсервативных* сил, действующих на частицу. Работу консервативных сил над частицей можно выразить через изменение её потенциальной энергии:

$$A_{\text{конс}} = -(U_{\text{кон}} - U_{\text{нач}}), \qquad (2)$$

где $U_{\text{кон}}$ и $U_{\text{нач}}$ – потенциальные энергии частицы в результирующем потенциальном поле действующих на частицу консервативных сил в конечном и начальном положениях частицы соответственно. Подставляя (2) в (1), после небольших преобразований, получим:

$$(K_{\text{кон}} + U_{\text{кон}}) - (K_{\text{нач}} + U_{\text{нач}}) = A_{\text{неконс}}\,. \qquad (3)$$

Величину $E = K + U$ называют **полной механической или просто механической энергией частицы**. Формула (3) выражает **закон изменения механической энергии частицы**: *изменение механической энергии частицы равно сумме работ* ***всех неконсервативных сил****, действующих на частицу*.

Из (3) также получаем **закон сохранения механической энергии частицы***: механическая энергия частицы сохраняется, если работа* ***всех неконсервативных сил****, действующих на частицу, равна нулю*.

**Определение**. *Кинетической энергией системы частиц* называется сумма кинетических энергий частиц, входящих в систему.

Рассмотрим теперь систему из двух частиц, которые взаимодействуют как с внешними телами, так и друг с другом. В отличие от рассмотренного выше случая одной частицы, в случае двух взаимодействующих частиц наряду с внешними силами (заранее заданными во всех точках пространства и во все моменты времени) существуют силы взаимодействия между частицами (внутренние силы), которые существенным образом зависят от движения обеих частиц. С внешними силами будем поступать так же, как и в случае одной частицы, а внутренние силы будем рассматривать отдельно. Тогда закон изменения механической энергии (3) для каждой из частиц можно записать в виде:

$$\Delta K_1 + \Delta U_1 = A_{1,\text{неконс}}^{\text{внешн}} + A_1^{\text{внутр}},$$

$$\Delta K_2 + \Delta U_2 = A_{2,\text{неконс}}^{\text{внешн}} + A_2^{\text{внутр}},$$

где $A_1^{\text{внутр}}$ и $A_2^{\text{внутр}}$ – работы сил взаимодействия частиц над первой и второй частицами соответственно. После сложения двух последних уравнений получим:

$$\Delta K + \Delta U^{\text{внеш}} = A_{\text{неконс}}^{\text{внешн}} + A_1^{\text{внутр}} + A_2^{\text{внутр}}. \quad (4)$$

Здесь $\Delta K = \Delta K_1 + \Delta K_2$ – изменение кинетической энергии системы двух частиц, $\Delta U^{\text{внеш}} = \Delta U_1 + \Delta U_2$ – изменение потенциальной энергии системы частиц во внешних потенциальных полях, $A_{\text{неконс}}^{\text{внешн}} = A_{1,\text{неконс}}^{\text{внешн}} + A_{2,\text{неконс}}^{\text{внешн}}$ – работа всех внешних неконсервативных сил над обеими частицами. Расчёт работ $A_1^{\text{внутр}}$ и $A_2^{\text{внутр}}$ по отдельности почти всегда является достаточно сложной задачей, если только в силу каких-либо очевидных причин хотя бы одна из этих работ не равна нулю или сила взаимодействия частиц не является постоянной. Дело в том, что из-за движения первой (второй) частицы сила, действующая на вторую (первую) частицу, часто зависит не только от положения последней, но и от времени. Однако, оказывается, что сумма $A_1^{\text{внутр}} + A_2^{\text{внутр}}$ во многих важных случаях может быть найдена достаточно легко.

## Независимость суммы работ сил взаимодействия двух частиц от выбора системы отсчёта. Потенциальная энергия взаимодействия. Потенциальная энергия системы двух частиц

Пусть за некоторое малое время $dt$ первая частица переместилась на $d\overrightarrow{r_1}$, а вторая частица на $d\overrightarrow{r_2}$. Тогда элементарная работа силы $\overrightarrow{F_{12}}$, действующей на первую частицу со стороны второй будет равна:

$$\delta A_1 = \overrightarrow{F_{12}} d\overrightarrow{r_1}.$$

Аналогично, элементарная работа силы $\overrightarrow{F_{21}}$, действующей на вторую частицу со стороны первой, за это же время будет равна:

$$\delta A_2 = \overrightarrow{F_{21}} d\overrightarrow{r_2}.$$

Для суммы работ сил взаимодействия с учётом III закона Ньютона ($\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}}$) получим:

$$\delta A_{\text{вз}} = \delta A_1 + \delta A_2 = \overrightarrow{F_{12}} d\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{F_{21}} d\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{F_{12}}(d\overrightarrow{r_1} - d\overrightarrow{r_2}) = \overrightarrow{F_{12}} d\overrightarrow{r_{12}}, \quad (5)$$

где $d\overrightarrow{r_{12}} = d\overrightarrow{r_1} - d\overrightarrow{r_2}$ – перемещение первой частицы относительно второй за время $dt$.

Так как $\overrightarrow{F_{12}}$ и $d\overrightarrow{r_{12}}$ не меняются при переходе из одной системы отсчета в другую (не обязательно инерциальную!), то из (5) следует, что *сумма элементарных работ, совершаемых за* *одно и то же малое время силами взаимодействия двух частиц, не зависит от системы отсчета, в которой рассматривается движение частиц*. А поскольку работа на конечном перемещении равна сумме элементарных работ на составляющих его малых перемещениях, то справедливо следующее утверждение.

**Утверждение**. *Сумма работ, совершаемых силами взаимодействия двух частиц при их перемещениях в течение любого интервала времени, не зависит от системы отсчета, в которой рассматривается движение этих частиц*.

В частности, можно использовать систему отсчета $S$, которая поступательно движется относительно некоторой инерциальной системы отсчёта и в которой одна из частиц (назовём её первой) неподвижна. Тогда в $S$ работа силы взаимодействия над первой частицей будет равна нулю. И остаётся в этой же системе отсчёта найти работу силы взаимодействия над второй частицей. При этом в силу неподвижности первой частицы мы получаем уже знакомую нам задачу расчёта работы некоторого заданного силового поля на некоторой траектории движения точки приложения силы. В частности, если в системе S сила взаимодействия, действующая на вторую частицу со стороны первой частицы, ***является потенциальной***, то для неё обычным образом можно ввести потенциальную энергию (только теперь по своему физическому смыслу это будет **потенциальная энергия взаимодействия двух частиц**) и выразить её работу через изменение этой потенциальной энергии. Тогда *в любой другой системе отсчета по доказанному выше утверждению сумма работ, совершаемых уже обеими силами взаимодействия двух частиц, не будет зависеть от траектории движения частиц и будет равна разности потенциальных энергий взаимодействия этих двух частиц в их начальном и конечном положениях*:

$$A_{\text{вз}} \equiv A_1^{\text{внутр}} + A_2^{\text{внутр}} = U_{\text{вз,нач}} - U_{\text{вз,кон}} = -\Delta U_{\text{вз}}. \qquad (6)$$

Разбивая силы взаимодействия частиц на потенциальные и не потенциальные и пользуясь (6), **закон изменения механической энергии системы из двух частиц** (4) можно записать в виде:

$$\Delta K + \Delta U = A_{\text{неконс}}\,. \qquad (7)$$

В (7) $U = U_1 + U_2 + U_{\text{вз}}$ – потенциальная энергия системы двух частиц, равная сумме потенциальных энергий этих частиц во внешних потенциальных полях (создаваемых телами, не входящими в рассматриваемую систему) и потенциальной энергии их взаимодействия между собой, $A_{\text{неконс}}$ – сумма работ *всех* неконсервативных сил (***как внутренних, так и внешних***) над обеими частицами системы.

**Пример**. Потенциальная энергия $U$ двух частиц массами $m_1$ и $m_2$, находящихся на расстоянии R друг от друга на высотах $h_1$ и $h_2$ от поверхности Земли и соединенных пружиной жесткости k, имеющей в недеформированном состоянии длину L равна:

$$U = (m_1 h_1 + m_2 h_2)g - G\frac{m_1 m_2}{R} + \frac{k(R-L)^2}{2} + C,$$

где величина константы $C$ определяется выбором нулевых точек для потенциальных энергий. В частности, если за ноль потенциальной энергии в поле тяжести Земли принять энергию на её поверхности, за ноль потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух частиц принять их энергию в положении, когда они удалены на бесконечно большое расстояние, и за ноль потенциальной энергии упругой деформации пружины принять энергию не деформированной пружины, то $C = 0$.

**Законы изменения и сохранения механической энергии для произвольной системы частиц**

Проведённое выше рассмотрение системы двух частиц достаточно очевидным образом обобщается на произвольную систему $N$ частиц, которые взаимодействуют как с внешними телами, так и друг с другом. Силы, действующие на каждую частицу, разобьем на три группы:

1) консервативные внешние (действующие на частицы системы со стороны тел, не входящих в рассматриваемую систему);

2) консервативные внутренние (действующие на одну из частиц системы со стороны других частиц, входящих в рассматриваемую систему);

3) все неконсервативные (как внутренние, так и внешние).

Заметим, что в последнюю группу можно включать не только действительно неконсервативные силы, но и силы, которые являются консервативными, но по каким-либо причинам мы не хотим вводить для них потенциальную энергию.

Пусть за некоторый промежуток времени система частиц перешла из состояния 1 в состояние 2, то есть каким-то образом изменились положения и скорости всех или некоторых частиц, входящих в систему. При этом каждая частица совершила определенное перемещение, двигаясь под действием перечисленных выше сил. По закону изменения механической энергии (3) для каждой из частиц имеем:

$$\Delta K_i + \Delta U_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij,\text{конс}}^{\text{внутр}} + A_{i,\text{неконс}} \quad (i = 1,2,\dots,N), \tag{8}$$

где $\Delta U_i$ – изменение потенциальной энергии $i$-й частицы во всех внешних потенциальных полях; $A_{ij,\text{конс}}^{\text{внутр}}$ – работа результирующей силы всех консервативных сил, действующих на $i$-ю частицу системы со стороны $j$-й частицы; $A_{i,\text{неконс}}$ – сумма работ *всех* (*как внутренних, так и всех внешних*) неконсервативных сил, действующих на $i$-ю частицу системы. После сложения всех $N$ уравнений (8) получим:

$$\Delta K + \Delta U^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij,\text{конс}}^{\text{внутр}} + A_{\text{неконс}}\,. \qquad (9)$$

В (9) $\Delta K$ – изменение кинетической энергии системы, $\Delta U^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{N} \Delta U_i$ – изменение потенциальной энергии системы частиц во внешних потенциальных полях, $A_{\text{неконс}} = \sum_{i=1}^{N} A_{i,\text{неконс}}$ – сумма работ *всех* (*как внутренних, так и всех внешних*) неконсервативных сил, действующих на все частицы системы. Работы внутренних консервативных сил можно сгруппировать попарно и выразить через изменения потенциальных энергий взаимодействия частиц во всех различных парах частиц системы:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij,\text{конс}}^{\text{внутр}} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \left( A_{ij,\text{конс}}^{\text{внутр}} + A_{ji,\text{конс}}^{\text{внутр}} \right) = -\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \Delta U_{ij\,\text{взаим}}, \qquad (10)$$

где $U_{ij\,\text{взаим}}$ – потенциальная энергия взаимодействия $i$-й и j-й частиц, а суммирование проводится по всем различным парам частиц (каждая пара учитывается один раз).

Величину

$$U = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \Delta U_{ij\,\text{взаим}} + \sum_{i=1}^{N} \Delta U_i \qquad (11)$$

называют **потенциальной энергией системы частиц.** Она равна сумме потенциальных энергий взаимодействия частиц во всех различных парах частиц системы и потенциальных энергий всех частиц системы во внешних потенциальных полях (создаваемых телами, не входящими в рассматриваемую систему). Величину $E \equiv K + U$ называют **полной механической** (или просто механической) **энергией системы**. Подставляя (10), (11) в (9) окончательно получим **закон изменения механической энергии системы частиц**:

$$E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}} = A_{\text{неконс}}\,, \qquad (12)$$

т.е. *изменение механической энергии системы равно сумме работ* ***всех (как внутренних, так и внешних)*** *неконсервативных сил, действующих на частицы системы*.

Из (12) также имеем **закон сохранения механической энергии системы частиц**: *механическая энергия системы частиц сохраняется, если работа* ***всех (как внутренних, так и внешних)*** *неконсервативных сил, действующих на частицы системы равна нулю*.

Таким образом, в отличие от импульса системы частиц, который сохраняется в любой замкнутой системе, *для сохранения энергии в замкнутой системе* ***дополнительно*** *необходимо, чтобы работа всех внутренних неконсервативных сил в этой системе равнялась нулю*.

***Замечания***.

1. Мы получили законы сохранения и изменения механической энергии из теоремы о

кинетической энергии, которую мы доказывали на основе второго закона Ньютона. Поэтому все наши выводы справедливы только в инерциальных системах отсчета. При работе в неинерциальных системах отсчета необходимо дополнительно учитывать работу сил инерции.

2. Взаимодействия, при которых сохраняется механическая энергия, часто называют **упругими**.

3. Закон сохранения механической энергии является частным случаем фундаментального закона природы – закона сохранения полной энергии в замкнутой системе. Как оказывается, последний связан с однородностью времени: все явления в замкнутой системе при одинаковых начальных условиях будут дальше протекать совершенно одинаково, независимо от того, в какой момент времени эти начальные условия созданы.

### Виды равновесия. Энергетические условия устойчивости равновесия

Из II закона Ньютона следует, что в инерциальной системе отсчета частица находится в равновесии (покоится), если в некоторый момент времени она покоилась, и векторная сумма действующих на неё сил равна нулю.

*Равновесие бывает устойчивым, неустойчивым и безразличным*.

**Определение**. Положение равновесия частицы называют **устойчивым**, если при любых достаточно малых возможных перемещениях частицы из положения равновесия действующие на неё силы стремятся вернуть её обратно, и **неустойчивым**, если силы, возникающие при сколь угодно малом отклонении хотя бы в некотором направлении, уводят её дальше от положения равновесия. Если же при любых достаточно малых возможных смещениях действующие на частицу силы по-прежнему уравновешиваются, то положение равновесия называют **безразличным**.

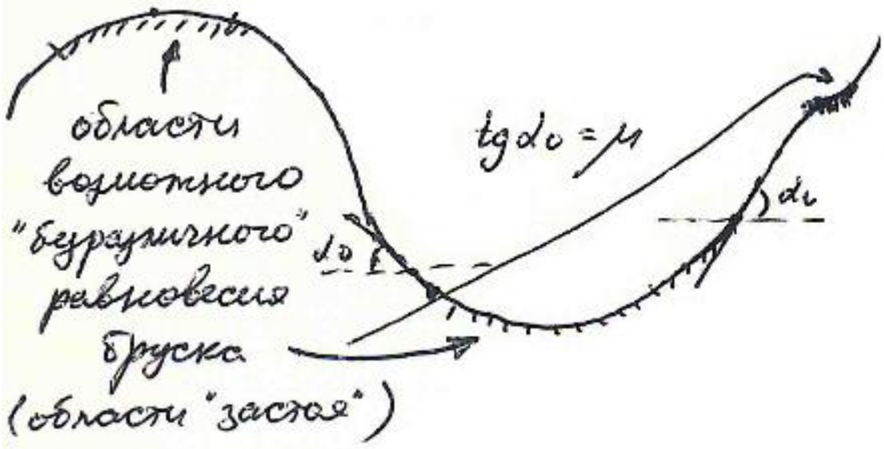

Наглядное представление о связи видов равновесия частицы и особенностей в зависимости потенциальной энергии частицы от её положения можно получить, рассматривая поведение частицы на кривой гладкой поверхности при наличии силы тяжести. На рисунке изображен профиль некоторой поверхности и различные положения частицы на ней. Чем выше находится частица, тем больше её потенциальная энергия $U = mgh$.

Точки 1 и 2 соответствуют локальным минимумам потенциальной энергии и одновременно устойчивым положениям равновесия. Точки 3 и 4 соответствуют локальным максимумам потенциальной энергии и одновременно неустойчивым положениям равновесия, так как при малейшем смещении частицы в ту или иную сторону, она начнёт соскальзывать в яму к положению устойчивого равновесия. Положение 5, в котором зависимость U(x) имеет точку перегиба, также соответствует неустойчивому положению равновесия. Точки 6 и 7 соответствуют постоянству потенциальной энергии, в них частица находится в безразличном равновесии. Наконец, положение 8 соответствует неравновесному состоянию ($\vec{F} \neq 0$).

Все закономерности, выясненные на этом простом примере, остаются справедливыми и в более общем случае. Пусть все силы, действующие на частицу, являются консервативными. Ранее было доказано, что потенциальная сила всегда направлена в сторону убывания потенциальной энергии. Поэтому, если потенциальная энергия в данном положении частицы меньше, чем в любом другом возможном близком положении, то при любом малом возможном отклонении частицы всегда будет возникать сила, направленная к её исходному состоянию, т.е. *состояние равновесия частицы, находящейся в поле консервативных сил, соответствующее локальному минимуму потенциальной энергии всегда является устойчивым*. С другой стороны, по определению устойчивого равновесия при любом малом возможном отклонении от него возникает сила, стремящаяся вернуть частицу в исходное состояние. Но потенциальная сила всегда направлена в сторону убывания потенциальной энергии. Значит, в состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия частицы меньше, чем в любом другом возможном близком состоянии, т.е. *состоянию устойчивого равновесия частицы всегда соответствует минимум её потенциальной энергии.*

Таким образом, ***некоторое состояние равновесия частицы, на которую действуют только консервативные силы, является состоянием устойчивого равновесия тогда и только тогда, когда потенциальная энергия частицы в этом состоянии имеет локальный минимум***.

Можно доказать, что данное утверждение справедливо и для консервативной *системы частиц*, т.е. системы частиц, на которые не действуют не потенциальные силы. При этом **положение равновесия *системы частиц* называют устойчивым**, если при любых малых возможных перемещениях одной или нескольких частиц системы из положения равновесия действующие на частицы системы силы стремятся вернуть всю систему в её исходное состояние.




Наш вывод остаётся справедливым и при наличии неконсервативных сил, равных нулю при отсутствии движения (например, сил сопротивления жидкостей и газов). Но *при наличии сил сухого трения минимальность потенциальной энергии уже не является ни достаточным, ни необходимым условием* ***устойчивости*** *равновесия*. В этом случае часто возникают области застоя (области ***безразличного*** равновесия системы). Примером может служить равновесие бруска, лежащего на шероховатой поверхности произвольного профиля (см. рисунок) или наклонной плоскости.

### Вторая и третья космические скорости

**Определение**. Минимальная скорость, которую нужно сообщить телу вблизи поверхности планеты для того, чтобы оно:

а) преодолело гравитационное притяжение планеты, называется ***второй космической скоростью*** для этой планеты;

б) смогло покинуть пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца, называется ***третьей космической скоростью*** для этой планеты.

Найдем вторую космическую скорость $v_{II}$ для Земли, пользуясь законом сохранения энергии. Кинетическая энергия тела при запуске $K_1 = \frac{m{v_{II}}^2}{2}$, потенциальная энергия вблизи поверхности Земли (при выборе «нулевой точки» на бесконечности) $U_1 = -G\frac{mM}{R} \equiv -mgR$. В конечном состоянии, когда тело достаточно далеко удалилось от Земли, его потенциальная энергия в поле тяготения Земли равна нулю. Поэтому по закону сохранения энергии имеем:

$$\frac{m{v_{II}}^2}{2} - mgR = \frac{m{v_K}^2}{2}. \qquad (13)$$

Из (13), очевидно, что минимальная начальная скорость, необходимая для преодоления гравитационного притяжения Земли, соответствует ситуации, когда на большом расстоянии от Земли скорость тела $v_K$ обращается в ноль. Поэтому

$$v_{II} = \sqrt{2gR} \approx 11{,}2\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Заметим, что при сообщении ракете второй космической скорости она удалится от Земли на расстояние много большее радиуса Земли независимо от того, в каком направлении сообщена скорость.

Строго говоря, уравнение (13) является приближенным, т.к. при его записи мы пренебрегли изменением потенциальной энергии тела в гравитационном поле Солнца в процессе его отлёта от Земли по сравнению с изменением его потенциальной энергии в гравитационном поле Земли. Это можно сделать, т.к. потенциальная энергия гравитационного взаимодействия находящегося на поверхности Земли тела с Солнцем всего примерно в 15 раз больше, чем с

Землей, а расстояние от Земли до Солнца в 20 тысяч раз больше радиуса Земли. Поэтому тело может удалиться от Земли на расстояние много большее радиуса Земли, но при этом крайне не значительно изменить своё расстояние до Солнца, а значит и изменение его потенциальной энергии в гравитационном поле Солнца будет много меньше изменения его потенциальной энергии взаимодействия с Землей и им можно пренебречь.

Найдем теперь третью космическую скорость. Забудем на время о земном тяготении и найдем минимальную скорость $v_1$, которую надо сообщить телу, находящемуся от Солнца на расстоянии $r$, равном радиусу земной орбиты, чтобы оно смогло преодолеть притяжение Солнца. Из закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{m{v_1}^2}{2} - G\frac{mM_c}{r} = 0,$$

где $M_c$ – масса Солнца. Легко видеть, что $v_1$ в $\sqrt{2}$ раз больше скорости Земли на круговой орбите движения вокруг Солнца.

$$v = \sqrt{\frac{GM_c}{r}} = 29{,}8\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Последнее равенство следует из II закона Ньютона для движения Земли по круговой орбите:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM_c}{r^2}.$$

Итак

$$v_1 = \sqrt{2}v \approx 42{,}1\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Если мы используем орбитальное движение Земли и запустим тело в ту же сторону, куда движется Земля, то телу достаточно будет сообщить добавочную скорость:

$$\Delta v = \left(\sqrt{2} - 1\right)v \approx 12{,}3\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Теперь можно найти и саму третью космическую скорость. Для этого надо учесть, что скорость $\Delta v$ относительно Земли тело должно иметь после того, как оно преодолеет притяжение Земли, т.е. в (13) следует положить $v_K = \Delta v = \left(\sqrt{2} - 1\right)v$:

$$\frac{m{v_{III}}^2}{2} - mgR = \frac{m\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 v^2}{2}. \qquad (14)$$

Из (14) окончательно получаем

$${v_{III}}^2 = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 v^2 + 2gR \equiv \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 v^2 + {v_{II}}^2.$$

Следовательно, $v_{III} \approx 16{,}7\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$.