Лекция 2

Относительность движения. Формулы сложение скоростей и ускорений. Естественный способ описания движения частицы. Сопровождающая система координат. Физический смысл тангенциальной компоненты ускорения. Равнопеременное движение. Радиус кривизны и центр кривизны траектории в точке. Центростремительное ускорение. Движение по дуге окружности: угловая скорость и её связь с линейной скоростью, угловое ускорение и его связь с тангенциальной составляющей ускорения, период и частота вращения.

Относительность движения. Формула сложения скоростей

Положение одной и той же частицы мы можем одновременно рассматривать в разных системах отсчета. Ясно, что при этом у одной и той же частицы могут быть совершенно различные координаты, т.е. **положение тела относительно**. Но относительно и движение тела. Относительность движения заключается в том, что перемещение, скорость, ускорение и траектория движения тела относительно разных систем отсчета могут быть (все или часть из них) различными. Относителен и покой, как частный случай движения. Абсолютно покоящихся тел не существует.

Возникает естественный вопрос о том, как связаны между собой кинематические характеристики движения (перемещение, скорость, ускорения), найденные в двух системах отсчета, движущихся друг относительно друга. Важность ответа на этот вопрос, в частности, обусловлена тем, что решение многих физических задач заметно упрощается при использовании удобной системы отсчёта.

Представьте себе, что пассажир идет со скоростью $V_{отн}$ вдоль вагона поезда, который движется со скоростью V_0 относительно Земли. С какой скоростью пассажир будет двигаться относительно Земли? Очевидно, ответ будет зависеть от того идет ли пассажир по ходу поезда или против хода. Поэтому исходный вопрос следует уточнить. Сделаем это, введя две системы отсчета и используя понятие проекции вектора скорости. Первую систему отсчета S (условно говоря, «неподвижную») свяжем с землей и направим соответствующую координатную ось Ox вдоль железнодорожного пути. Начало координат выберем в центре платформы. Вторую систему отсчета S' (условно говоря, «движущуюся») свяжем с поездом и направим ее координатную ось $O'x'$ вдоль поезда в том же направлении, что и ось Ox. Начало координат второй системы отсчета выберем в самом конце поезда. Заметим, что часто движение относительно неподвижной системы отсчета часто называют **абсолютным,** а движение относительно подвижной системы отсчета – **относительным.**

Очевидно, что координаты пассажира в двух системах отсчета и координата конца поезда ($X_{O'}$) в любой момент связаны простым соотношением:

$$X = X_{O'} + X', \qquad (1)$$

а значит и изменения этих координат за любой интервал времени связаны также:

$$\Delta X = \Delta X_{O'} + \Delta X'. \qquad (2)$$

Подчеркнем, что при записи (1) и (2) мы существенным образом используем *постоянную во времени коллинеарность* осей $O'x'$ и Ox движущейся и неподвижной систем отсчета. Важность последнего обстоятельства легко понять на примере мальчика, сидящего на вращающейся карусели. Если в этом случае в качестве движущейся системы отсчета попытаться рассматривать систему отсчета, жестко связанную с каруселью и с началом координат на оси карусели, то из (2) получится, очевидно, неверный результат. Действительно, в этом случае для любых интервалов времени $\Delta X_{O'} = 0$ (начало отсчета движущейся системы отсчета неподвижно относительно земли, т.к. выбрано на оси карусели), $\Delta X' = 0$ (мальчик неподвижен относительно вращающейся карусели), но при этом, очевидно, в общем случае ΔX (мальчик движется относительно земли, т.к. карусель вращается).

Заметим, что уравнение справедливое для проекций векторов, естественно справедливо и для самих векторов (ведь вектора полностью задаются своими проекциями на декартовые оси). Поэтому уравнение (2) можно записать в векторном виде:

$$\vec{S}_{абс} = \vec{S}_{0'} + \vec{S}_{отн}. \qquad (3)$$

Подчеркнем, что удобство формулы (3) по сравнению с (2) заключается в том, что при записи (3) нет необходимости говорить что-либо про выбор направлений координатных осей в движущейся и неподвижной системах отсчета. Более того, для справедливости (3) эти оси не обязаны быть коллинеарными. Однако, при этом по-прежнему очень существенно, чтобы угол между направлениями этих осей не изменялся со временем, т.е. чтобы системы отсчета **двигались друг относительно друга поступательно**.

Таким образом, при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся поступательно относительно первой, перемещение тела относительно неподвижной системы отсчета ($\vec{S}_{абс}$) равно векторной сумме перемещения тела относительно подвижной системы отсчета ($\vec{S}_{отн}$) и перемещения подвижной системы относительно неподвижной ($\vec{S}_{0'}$). Рассмотрев перемещения за достаточно малый интервал времени dt и разделив (3) на dt сразу получим соотношение для мгновенных скоростей:

$$\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{0'} + \vec{V}_{отн}. \qquad (4)$$

Здесь $\vec{V}_{0'}$ – скорость поезда относительно земли и одновременно скорость относительно земли (т.е. относительно неподвижной системы отсчета) начала координат движущейся системы отсчета, связанной с поездом; $\vec{V}_{отн}$ – скорость пассажира относительно поезда, т.е. его скорость в движущейся системе отсчета, связанной с поездом; $\vec{V}_{абс}$ – скорость пассажира относительно земли, т.е. его скорость в неподвижной системе отсчета, связанной с землей.

Формула (4) называется **формулой сложения скоростей** для систем отсчета, движущихся поступательно друг относительно друга. Из нее следует, что «*при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся поступательно относительно первой, скорость тела относительно неподвижной системы отсчета равна векторной сумме скорости тела относительно подвижной системы отсчета и скорости подвижной системы относительно неподвижной*».

Действуя аналогично, можно получить такую же формулу и для ускорений одного и того же тела, найденных в двух системах отсчета движущихся друг относительно друга поступательно:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{отн}, \qquad (5)$$

где $\vec{a}_0$ – ускорение движущейся системы отсчета относительно неподвижной; $\vec{a}_{отн}$ – ускорение тела относительно движущейся системы отсчета; $\vec{a}_{абс}$ – ускорение тела относительно неподвижной системы отсчета. Формула (5) называется **формулой сложения ускорений** для систем отсчета, движущихся поступательно друг относительно друга. Из нее следует, что «*при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся поступательно относительно первой, ускорение тела относительно неподвижной системы отсчета равно векторной сумме ускорения тела относительно подвижной системы отсчета и ускорения подвижной системы относительно неподвижной*».

Формулы сложения скоростей и ускорений оказываются особенно удобными при исследовании движения нескольких тел. В этом случае поиск ответов на поставленные вопросы может существенно упроститься, если использовать рационально выбранную систему отсчета или несколько разных систем отсчета на разных этапах решения.

Подчеркнем, что мы получили формулу (4) исходя из наших повседневных наблюдений. Однако современное развитие физики привело к существенно более сложным представлениям о пространстве и времени, и, как результат, к другой формуле сложения скоростей. Например, оказывается, что скорость любого тела в любой системе отсчета не может превышать скорость света в вакууме (300 000 км/с), и, следовательно, формула (4) не может быть справедлива при скоростях движения сравнимых со скоростью света. Действительно, предположим, что «поезд» едет относительно земли со скоростью 200 000 км/с, и по ходу движения поезда по нему идет «пассажир» с такой же скоростью относительно поезда. Тогда в соответствии с формулой (4) скорость «пассажира» относительно земли оказывается больше скорости света, что невозможно, и значит формула (4) при таких больших скоростях движения не работает. Однако при скоростях движения много меньших скорости света, возникающие поправки настолько малы, что их практически невозможно измерить самыми точными современными приборами, и, значит, в этом случае можно спокойно пользоваться формулой (4), полученной в рамках классических физических представлений.

Естественный способ описания движения частицы

В тех случаях, когда в некоторой системе отсчета траектория движения частицы известна заранее, часто используют так называемый естественный способ описания положения частицы. На заданной траектории выбирается начало отсчета – точка *O*, и положительное направление. Тогда текущее положение частицы в точке *A* однозначно задается криволинейной координатой *p*, такой, что $|p|$ равен длине дуги траектории *OA*, причем $p > 0$, если частица находится в положительном направлении от точки *O* и $p < 0$, если – в отрицательном. При таком описании пользуются также так называемой **сопровождающей системой координат**. Одна ее ось – тангенциальная ось τ – направлена в каждой точке траектории по касательной в сторону выбранного положительного направления, а вторая ось – нормальная ось *n* – перпендикулярно первой и направлена в сторону вогнутости траектории (т.е. ось *n* в точке *A* траектории и малый участок траектории *CAB* лежат в одной и той же полуплоскости относительно касательной к траектории, проведенной в точке *A*). Очевидно, что при движении в одном направлении модуль изменения криволинейной координаты равен длине пути, пройденного частицей.

Как известно, скорость тела в любой точке направлена по касательной, проведенной в этой точке к траектории. Пусть в момент времени *t* частица находится в точке *A*, имеет ненулевую скорость $\vec{V}(t)$ и ускорение $\vec{a}(t)$. Тогда спустя малый интервал времени *dt* частица будет иметь скорость $\vec{V}(t+dt)=\vec{V}(t)+\vec{a}(t)dt$. Возводя это векторное равенство в квадрат, получим: $V^2(t+dt)=V^2+2(\vec{V}\,\vec{a})dt+a^2(dt)^2$, где в правой части равенства для краткости опущен аргумент *t*, а также использовано известное свойство скалярного произведения $(\vec{V}\vec{V})=V^2$.

Считая, что *dt* достаточно мало, мы можем пренебречь последним слагаемым по сравнению с первыми двумя. Учитывая также, что в силу малости dt, второе слагаемое много меньше первого, и пользуясь приближенной формулой $(1 + x)^{1/2} = 1 + x/2 - x^2/4 + \ldots \approx 1 + x/2$, справедливой при $x << 1$, получим:

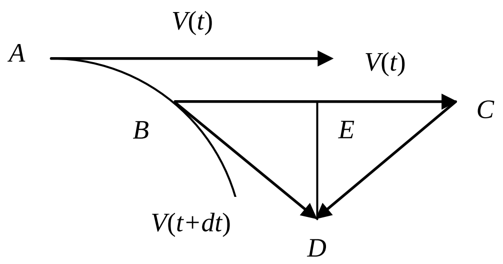
$$V(t+dt) = \sqrt{V^2\left[1 + \frac{2(\vec{V}\,\vec{a})}{V^2}dt\right]} \approx V(t)\left[1 + \frac{a_\tau(t)dt}{V_\tau(t)}\right],$$

где учтено, что вектор скорости направлен по касательной к траектории, т.е. параллельно оси τ, и, следовательно, $V^2 = V_\tau^2$, $(\vec{V}\,\vec{a}) = V_\tau a_\tau$. За достаточно малый промежуток времени направление движения частицы будет сохраняться, и следовательно, знаки проекций ее скорости на тангенциальные оси сопровождающей системы координат в близкие моменты времени t и $t + dt$ будут одинаковыми. Поэтому последнее равенство справедливо не только для величин скоростей, но и для их проекций: $V_\tau(t+dt) = V_\tau(t)\left[1 + \frac{a_\tau(t)dt}{V_\tau(t)}\right] = V_\tau(t) + a_\tau(t)dt$. А это означает, что $a_\tau(t) = \frac{V_\tau(t+dt) - V_\tau(t)}{dt} = \frac{dV_\tau(t)}{dt}$, т.е. тангенциальная составляющая ускорения описывает изменение величины скорости при криволинейном движении и ни как не связано с изменением направления скорости.

Движение по произвольной траектории с постоянным тангенциальным ускорением называется **равнопеременным**. Частным случаем равнопеременного движения является прямолинейное равноускоренное движение. По аналогии с прямолинейным равноускоренным движением нетрудно понять, что при произвольном равнопеременном движении проекция скорости V_τ и криволинейная координата p меняются по законам: $V_\tau = V_{\tau 0} + a_\tau t$, $p = p_0 + V_{\tau 0}t + a_\tau t^2/2$.

Любую гладкую криволинейную траекторию можно приближенно представить как последовательность дуг различных окружностей. Радиус окружности, дуга которой приближенно совпадает с достаточно малым участком траектории, включающим точку A, называется **радиусом кривизны траектории** в точке A. Центр этой окружности называется **центром кривизны траектории**.

Пусть участок траектории между близкими точками A и B приближенно совпадает с дугой окружности радиуса R, центр которой лежит в точке O. Так как касательная, проведенная через любую точку дуги окружности перпендикулярна соответствующему радиусу, то угол поворота вектора скорости $d\varphi$ при движении частицы из точки A в точку B равен углу между радиусами OA и OB. Следовательно, длина дуги AB равна: $dS = Rd\varphi$. С другой стороны, в силу малости времени dt, движение частицы по дуге AB можно считать почти равномерным: $dS \approx Vdt + a_\tau(dt)^2/2$



$\approx Vdt$. Объединяя две последние формулы, получаем:

$$d\varphi = Vdt/R \qquad (6)$$

Рассмотрим теперь треугольник *BCD*, построенный на векторах скоростей $\vec{V}(t)$ и $\vec{V}(t+dt)$. По своему физическому смыслу $\overrightarrow{CD} = \vec{V}(t+dt) - \vec{V}(t) = \vec{a}(t)dt$, $\overrightarrow{CE} = \vec{a}_\tau(t)dt$, $\overrightarrow{ED} = \vec{a}_n(t)dt$, где $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ – тангенциальная и нормальная составляющие ускорения. Из прямоугольного треугольника *BED* имеем: $sin(d\varphi) = ED/BD = a_n dt/V$. Но для малых углов $sin(d\varphi) \approx d\varphi$. Поэтому из последних двух формул имеем: $Vdt/R = a_n dt/V$. Откуда окончательно получаем:

$$a_n = V^2/R. \qquad (7)$$

Пусть частица движется от точки *A* к точке *B*, расположенной достаточно близко к точке *A*. Как уже говорилось, скорость всегда направлена по касательной к траектории. Поэтому, нетрудно убедится, что вектор ускорения в точке *A* и участок траектории *AB* будут лежать в одной и той же полуплоскости относительно касательной к траектории, проведенной в точке *A*. Т.е. ускорение в любой точке траектории направлено в сторону вогнутости траектории, и, следовательно, нормальная составляющая ускорения всегда направлена к центру кривизны траектории. Поэтому нормальную составляющую ускорения часто называют **центростремительным ускорением**. А поскольку нормальную ось *n* мы также направили в сторону вогнутости траектории, то естественно, что в правой части (7) стоит заведомо положительная величина. Ясно, что при движении по дуге окружности, центростремительное ускорение направлено к центру окружности.

При описании движения по окружности (или дугам окружности) часто используют также понятие угловой скорости.

Средней угловой скоростью движения частицы по дуге окружности называется отношение угла поворота радиуса, соединяющего центр окружности с частицей, к промежутку времени, за который этот поворот произошел: $\omega_{ср} = \Delta\varphi/\Delta t$.

Мгновенной угловой скоростью движения частицы по дуге окружности называется предельное значение средней угловой скорости при стремлении интервала усреднения к нулю, т.е.: $\omega_{мгн} = d\varphi/dt \equiv \omega$.

Из приведенного определения и формулы (6) следует, что мгновенные линейная (*V*) и угловая (ω) скорости при движении по окружности радиуса *R* связаны между собой:

$$\omega = V_\tau/R, \qquad (8)$$

При записи (8) предполагается, что положительные направления отсчета угла и тангенциальной оси τ согласованы между собой. В противном случае в формуле (8) появится знак минус.

При описании *равномерного движения по окружности* используют также такие характеристики, как:

1) **Период обращения** T – время одного полного оборота. Очевидно, $T = 2\pi/\omega = 2\pi R/V$.

2) **Частота обращения** $\nu = 1/T = \omega/(2\pi)$ – число полных оборотов по окружности, совершаемых частицей в единицу времени.

Для описания *неравномерного движения по окружности* кроме угловой скорости используют также понятие углового ускорения.

Угловое ускорение (точнее мгновенное угловое ускорение) равно отношению малого изменения $d\omega$ мгновенной угловой скорости к достаточно малому промежутку времени dt, за который это изменение произошло: $\beta = d\omega/dt$.

Т.к. в силу (8) угловая и линейная скорости при движении по дуге окружности пропорциональны друг другу, то и их изменения также пропорциональны, т.е. $d\omega = dV_\tau/R$. Следовательно:

$$\beta = d\omega/dt = (1/R)\, dV_\tau/dt = a_\tau/R, \qquad (9)$$

т.е. угловое ускорение и тангенциальная составляющая линейного ускорения пропорциональны друг другу. При записи (9) (также как и при записи (8)) предполагается, что положительные направления отсчета угла и тангенциальной оси τ согласованы между собой. В противном случае в формуле (9) появится знак минус.