3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ, решения

Математика

8 класс

1. Можно ли в каждой клетке доски 8×8 записать натуральное число так, чтобы любые два числа в соседних по стороне клетках отличались на 1, а любые два числа в клетках, отстоящих на ход коня, отличались на 3?

Решение 1. Предположим, такое возможно. Рассмотрим левую нижнюю клетку A. Заметим, что из нее за 3 хода можно попасть в соседнюю по стороне клетку (см. рисунок, путь $A \to B \to C \to D$). С одной стороны, числа в клетках A и D отличаются на 1. С другой стороны, числа в каждой из пар клеток A и B, B и C, C и D отличаются на 3, поэтому числа в клетках A и D отличаются на число кратное трем.

	B	
D		
A		C

Решение 2. Предположим, такое возможно. Рассмотрим шесть клеток, образующих прямоугольник 2×3. Обозначим его клетки, как показано на рисунке.

A	B	C
D	E	F

Пусть в клетке A стоит число n, а в клетке F, без ограничения общности, число $n + 3$. Рассмотрев путь $A \to B \to C \to F$, получим, что в клетке B стоит число $n + 1$, а в клетке C — число $n + 2$. Аналогично в клетке D стоит число $n + 1$, а в клетке E — число $n + 2$. Но тогда разность чисел в клетках C и D равна 0, противоречие.

2. В числе 50 цифр. Докажите, что часть из них можно вычеркнуть так, чтобы оставшееся число делилось на 1001.

Решение. Если в числе есть 0, то, вычеркнув все остальные цифры, получим число 0, которое делится на 1001. В противном случае в числе найдется хотя бы шесть одинаковых цифр (иначе цифр в числе не больше $5 \cdot 9 = 45$), обозначим эту цифру через k. Вычеркнем цифры так, чтобы осталось число $\overline{kkkkkk}$. Но

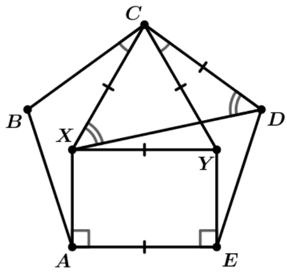
$$\overline{kkkkkk} = k \cdot 111111 = k \cdot 111 \cdot 1001,$$

поэтому оно делится на 1001.

3. Внутри правильного пятиугольника $ABCDE$ выбрана точка X такая, что $\angle XAE = 90°$ и длина отрезка CX равна длине стороны пятиугольника. Найдите величину угла CXD.

Ответ. $48°$.

Решение. Отметим такую точку Y, что четырехугольник $AXYE$ является прямоугольником.



В силу симметрии относительно прямой, проходящей через точку C перпендикулярно прямой AE, отрезки CX и CY равны. Поскольку $AE = XY$, то треугольник CXY правильный, то есть $\angle XCY = 60°$.

В силу той же симметрии $\angle BCX = \angle DCY$. Тогда

$$\angle DCY = \frac{\angle BCD - \angle XCY}{2} = \frac{108° - 60°}{2} = 24°.$$

Треугольник CDX равнобедренный, поэтому

$$\angle CXD = \frac{180° - \angle XCD}{2} = \frac{180° - 84°}{2} = 48°.$$

4. Всем детям в детском саду выдали по N конфет. После этого время от времени кто-нибудь из ребят брал часть своих конфет и раздавал их поровну остальным. Через несколько таких операций у одного из детей оказалось 30 конфет, а у другого — 23 конфеты. Сколько детей в детском саду?

Ответ. 7 детей.

Решение. Когда один из детей раздает часть своих конфет, мы можем считать, что сначала он дает каждому из остальных детей по конфете, потом — еще по конфете и так далее, пока не отдаст все, что хотел. Заметим, что разность количества конфет у первого и второго детей всегда будет делиться на k, где k — количество детей. Действительно, сразу после раздачи конфет эта разность была равна нулю, то есть делилась на k. Если первый отдаст всем остальным по конфете, то у него станет на $k-1$ конфету меньше, а у второго — на одну конфету больше, и разность изменится на k, то есть по-прежнему будет делиться на k. Аналогично, если конфеты раздает второй ребенок. Если же конфеты раздает кто-то из других детей, то количество конфет у первого и второго увеличивается на одну и ту же величину, то есть разность не изменится, и опять-таки будет делиться на k. По условию, в какой-то момент эта разность стала равна 7 конфетам. Значит, 7 делится на k. Так как в условии упомянуты двое детей, то $k > 1$. Следовательно, $k = 7$.

5. Вике в школе задали расставить в клетки таблицы 100×101 цифры 3, 4, 5 так, чтобы сумма цифр в каждой строке и в каждом столбце была кратна 3. Вика очень любит цифру 4, поэтому хочет, чтобы ее в таблице было как можно больше. Какое наибольшее количество цифр 4 она может использовать?

Ответ. 9966 четверок.

Решение. Пусть в таблице n троек и m пятерок. Чтобы сумма чисел в строке делилась на 3, в ней должна быть хотя бы одна тройка или хотя бы две пятерки, поэтому $n + \frac{m}{2} \geqslant 100$. Чтобы сумма чисел в столбце делилась на 3, в нем должно быть хотя бы две тройки или хотя бы одна пятерка, поэтому $\frac{n}{2} + m \geqslant 101$. Сложив неравенства, получим

$$\frac{3}{2} \cdot (n+m) \geqslant 201 \iff n+m \geqslant 134.$$

Таким образом, четверок в таблице не больше, чем $101 \cdot 100 - 134 = 9966$.

Покажем, что 9966 четверок Вика сможет поставить. Выделим левый верхний прямоугольник размера 34×68 и расставим в нем 68 троек парами, как показано на рисунке ниже. Выделим правый нижний прямоугольник 66×33 и расставим в нем 66 пятерок парами, как показано на рисунке ниже. Остальные клетки заполним четверками.

3	**3**	4	4	...	4	4	4	4	...	4	4
4	4	**3**	**3**	...	4	4	4	4	...	4	4
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
4	4	4	4	...	**3**	**3**	4	4	...	4	4
4	4	4	4	...	4	4	**5**	4	...	4	4
4	4	4	4	...	4	4	**5**	4	...	4	4
4	4	4	4	...	4	4	4	**5**	...	4	4
4	4	4	4	...	4	4	4	**5**	...	4	4
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
4	4	4	4	...	4	4	4	4	...	**5**	4
4	4	4	4	...	4	4	4	4	...	**5**	4
4	4	4	4	...	4	4	4	4	...	4	**5**
4	4	4	4	...	4	4	4	4	...	4	**5**

Несложно видеть, что эта таблица удовлетворяет условию задачи, при этом в нее ровно $68 + 66 = 134$ не четверки, то есть 9966 четверок.