

Интернет-олимпиада СУНЦ МГУ 7 класс
Решения задания 3 этапа

1. От улья к поляне с цветами пчела летит со скоростью $V=2$ м/с, а возвращается обратно с меньшей скоростью $U = 1,5$ м/с. За один час пчела успевае сделать 5 «рейсов». Время на передачу одной порции собранного урожая на «склад» составляет 1 минуту, а время на сбор этой порции составляет 5 минут. На каком расстоянии L от улья находится поляна с цветами?

Решение: На каждый рейс пчела затрачивает 12 минут. Из этого времени 6 минут – это время сбора и сдачи продукции. Следовательно, 6 минут нужно пчеле, чтобы проделать путь до поляны и на обратную дорогу. Отсюда следует соотношение: $L/V+L/U=6$ минут, т.е. $L=6 \times 60 \text{с} \times (2 \times 1.5) / 3.5 = 308.57$ метров.

Ответ: $L = 308.6 \approx 300$ метров.

Баллы: 10 за полное решение и правильный ответ.

2. Сплошной стальной кубик с длиной ребра $R=5$ см привязан тонкой прочной и нерастяжимой нитью к дну сосуда. В сосуд налили столько ртути, что кубик не касается дна, а нить натянута с силой $F=2,5$ Н. В этот же сосуд наливают столько воды, что весь кубик оказывается ниже её верхнего уровня. Какой теперь стала сила натяжения нити? Плотность ртути $\rho_{\text{Hg}}=13,6$ г/см³, плотность стали $\rho=7,8$ г/см³, плотность воды $\rho_{\text{воды}}=1,0$ г/см³. Считайте, что $g=10$ м/с².

Решение: Сумма сил, действующих на покоящийся предмет, погруженный в две среды/жидкости, равна нулю. А силы эти: сила тяжести $\downarrow \rho g R^3$ ($\rho g R^3 4\pi/3$), Архимедова сила, равная $\uparrow g \times$ (суммарная масса двух вытесненных предметом жидкостей), и сила натяжения нити \downarrow . Обозначим долю объема тела V , находящуюся ниже уровня расположения ртути, символом X . Эта доля такая же до и после добавления в сосуд воды. До того, как в сосуд дополнительно налили воду, условие равновесия было таким:

$$0 = V\rho_{\text{сталь}}g + F_{\text{до}} - X \times V\rho_{\text{ртуть}}g - (1 - X)V\rho_{\text{воздух}}g$$

Плотность воздуха настолько мала в сравнении с плотностями воды, стали и ртути, что последним слагаемым в правой части можно смело пренебречь. Следовательно,

$$X = \rho_{\text{сталь}}/\rho_{\text{ртуть}} + F_{\text{до}}/(V\rho_{\text{ртуть}}g)$$

А после добавления в сосуд воды условие равновесия будет другим:

$$0 = V\rho_{\text{сталь}}g + F_{\text{после}} - X \times V\rho_{\text{ртуть}}g - (1 - X)V\rho_{\text{воды}}g.$$

Отсюда найдется сила натяжения нити: $F_{\text{после}} = X \times V\rho_{\text{ртуть}}g + (1 - X)V\rho_{\text{воды}}g - V\rho_{\text{сталь}}g = X \times gV(\rho_{\text{ртуть}} - \rho_{\text{воды}}) - gV(\rho_{\text{сталь}} - \rho_{\text{воды}}) = gV \times [\rho_{\text{сталь}}/\rho_{\text{ртуть}} + F_{\text{до}}/(V\rho_{\text{ртуть}}g)] \times (\rho_{\text{ртуть}} - \rho_{\text{воды}}) - gV(\rho_{\text{сталь}} - \rho_{\text{воды}}) = F_{\text{до}}(1 - \rho_{\text{воды}}/\rho_{\text{ртуть}}) + gV\rho_{\text{воды}}(1 - \rho_{\text{сталь}}/\rho_{\text{ртуть}})$.

Ответ: $F_{\text{после}} = 2,85$ Н.

Баллы: За попытку решения 3 или 5 в зависимости от степени неправильности ☺ рассуждений. За полное решение и правильный ответ 10.

3. Ширина футбольных ворот 7,32 м. Вратарь, масса которого 80 кг, подпрыгнув, зацепился правой рукой за перекладину и висит. Расстояние от левой штанги до правой руки вратаря (по горизонтали) 2 м. Найдите разницу сил, с которыми перекладина ворот давит на вертикальные штанги. До «упражнения» вратаря эти силы были одинаковыми.

Решение: К прежним силам, которые действовали на перекладину ворот (сила тяжести и силы со стороны штанг), добавились три силы: вес вратаря (800Н вниз) и дополнительные силы со стороны штанг F_1 и F_2 . Именно эти дополнительные силы и создадут разницу сил,

которую нужно найти, поскольку до «упражнения» вратаря такой разницы не было. В сумме две дополнительные силы, действующие на перекладину со стороны штанг, равны: $F_1 + F_2 = 800 \text{ Н}$, а поскольку суммарный момент добавленных трех сил должен быть равен нулю, то эти две силы удовлетворяют соотношению: $2m \times F_1 = (7,32 \text{ м} - 2\text{м}) \times F_2$. Отсюда находятся силы: $F_1 \approx 581,4 \text{ Н}$, $F_2 \approx 218,6 \text{ Н}$, и разница сил: $\Delta F = F_1 - F_2 \approx 362,8 \text{ Н}$.

Баллы: За попытку решения 3 или 5 в зависимости от степени неправильности ☺ рассуждений. За полное решение и правильный ответ 10.

4. В картонную коробку, имеющую форму куба с ребром D , с равномерным по стенкам распределением массы m , стоящую на горизонтальном полу, засыпают одинаковые теннисные шарики, размеры которых значительно меньше D . Уровень расположения шариков в коробке все время выравнивают так, чтобы верхние шарики располагались в одной горизонтальной плоскости. Когда коробка оказалась полностью заполненной, суммарная масса шариков оказалась в 2 раза больше массы коробки. При каком уровне расположения верхних шариков центр масс коробки с шариками занимал самое низкое положение? При расчетах можно пользоваться калькулятором.

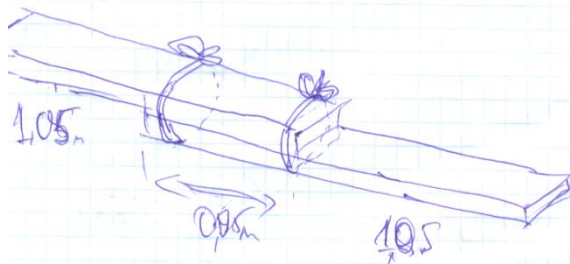
Решение: Если отсчитывать расстояние от дна коробки, то её центр масс (при наличии крышки) находится на высоте $D/2$. Когда в коробке верхние шарики находятся на уровне X , их масса равна $2mX/D$, а центр масс всех шариков находится на высоте $X/2$. Центр масс коробки с шариками находится на высоте:

$$[Dm/2 + mX^2/D] / [m + 2mX/D] = [D/2] \times [1 + 2(X/D)^2] / [1 + 2X/D].$$

Методом выделения полного квадрата или с помощью калькулятора методом подбора можно получить значение $X/D = (3^{0,5} - 1)/2 \approx 0,366$, которому соответствует минимальная высота центра масс над уровнем дна коробки. **Возможен вариант, когда дети считали, что у коробки нет крышки, тогда уровень будет немного ниже.**

Баллы: За попытку решения 3 или 5 в зависимости от степени неправильности ☺ рассуждений. За полное решение и правильный ответ 10.

5. Между двумя домами с плоскими крышами, которые располагаются на одной высоте над землей, расстояние 3 метра. Вася принес на одну из крыш две легкие и прочные доски одинаковой ширины и толщины, каждая из которых имеет длину 2 метра. Связав веревками эти доски так, как показано на рисунке, Вася соединил крыши домов мостиком. Доски своими свободными концами опираются о края крыш, «заходя» на каждую крышу на 2,5 см. А каждый из привязанных к другой доске концов охвачен веревкой, образующей «одинарное» кольцо.



Масса Васи $M = 70 \text{ кг}$. При какой минимальной прочности веревок на разрыв Вася может, не боясь упасть и не торопясь, переходить с одной крыши на другую?

Решение. Поскольку считается, что доски легкие, то учитывать в нагрузке мостика нужно только массу Васи. В каком бы месте на мостике ни находился Вася, сила натяжения веревок не должна превышать величины, при которой веревка рвется. Следовательно, нужно найти такое положение Васи на мостике, при котором веревка одного из колец натянута наиболее сильно. Легко догадаться, что веревочное кольцо, изображенное на рисунке справа, вообще не напряжено, так как верхняя доска при нагрузке сверху непосредственно

упирается в нижнюю доску. То есть сила натяжения веревки этого кольца не влияет на безопасность перехода с крыши на крышу. А веревка, изображенная на рисунке слева, будет натянута, причем сила её натяжения зависит от положения Васи на мостике. Пренебрегая разницей длин 0,95 м и 1,0 м, будем считать, что эти отрезки имеют одинаковые длины. Когда Вася находится на верхней доске, сила натяжения веревок растет по мере удаления Васи от левого конца мостика вплоть до момента, когда он окажется на крайнем правом конце верхней доски. В этот момент суммарная сила натяжения вертикальных участков веревок с одной и с другой стороны от досок должна быть равна $2Mg/3$. При дальнейшем перемещении по мостику к его правому концу по нижней доске сила натяжения веревок кольца слева становится все меньше. То есть веревка должна выдерживать силу натяжения $Mg/3$.

Баллы: За попытку решения 3 или 5 в зависимости от степени неправильности ☺ рассуждений. За полное решение и правильный ответ 10.

6. В двух соседних комнатах, разделенных непрозрачной стеной, находятся: в одной комнате три переключателя (включателя/выключателя), а в другой комнате три лампочки накаливания, каждая из которых управляется (включается и выключается) только одним из этих переключателей. Лампочки исправны, имеют одинаковые мощности 60 Вт, и ввернуты в патроны настольных ламп, стоящих на одном столе. Положения «включено» и «выключено» отмечены соответствующими надписями возле тумблеров переключателей. Из комнаты, в которой находятся выключатели, можно *только один раз* перейти, через коридор и рядом расположенные двери комнат в соседнюю комнату с лампочками. Опишите процедуру, в результате выполнения которой можно точно установить какой выключатель управляет какой из лампочек.

Решение: нужно сначала перевести два переключателя в положение «включено», а третий оставить в положении «выключено», подождать пару минут, затем один из этих переключателей снова перевести в положение «выключено». После этого нужно быстро перейти в соседнюю комнату. В ней одна из лампочек будет гореть, а две другие нет. Но одна из выключенных лампочек будет нагрета, а вторая будет холодной. Так будет установлено точное соответствие переключателей и лампочек.

Баллы: За попытку решения 2 или 5 в зависимости от степени неправильности ☺ рассуждений. За полное решение и правильный ответ 10.